京大理系 2012前期 ④

(1) $\sqrt[3]{2}$が有理数であると仮定すると、a, bを互いに素な自然数として $\sqrt[3]{2}=\frac{a}{b}$ と書ける

$2=\frac{a^3}{b^3}$ $a^3=2b^3$ より a^3は偶数, aは偶数 よってa'をある自然数として $a=2a'$ と書ける

$8a'^3=2b^3$, $4a'^3=b^3$ より b^3は偶数 bは偶数 これは a, bが互いに素であることに矛盾

よって $\sqrt[3]{2}$は無理数である

(2) $f(x)$ は有理数を係数とするxの多項式, a, b, c は有理数として

$P(x)=f(x)(x^3-2)+ax^2+bx+c$ と書ける

$P(\sqrt[3]{2})=0$ より $a\sqrt[3]{2}^2+b\sqrt[3]{2}+c=0$

$X=\sqrt[3]{2}$ として $aX^2+bX+c=0$ ① $2a+bX^2+cX=0$ ②

①②より

$$\begin{array}{rl} & abX^2+b^2X+bc=0 \\ - & abX^2+acX+2a^2=0 \\ \hline & (b^2-ac)X+bc-2a^2=0 \end{array}$$

$ac \neq b^2$のとき $X=\frac{2a^2-bc}{-ac+b^2}$ より Xは有理数になるから矛盾 よって $ac=b^2$ ——③

このとき $2a^2=bc$ —④

$a\neq 0$のとき ③より $c=\frac{b^2}{a}$ ④より $2a^2=b\frac{b^2}{a}$, $2=\left(\frac{b}{a}\right)^3$ $\sqrt[3]{2}=\frac{b}{a}$ より $\sqrt[3]{2}$は有理数になるから矛盾

よって $a=0$. ③より $b=0$. ①より $c=0$

ゆえに $P(x)=f(x)(x^3-2)$ と書けるから 題意は示された