

3 連立方程式

$$xz = x + z^2 + z \cdots \cdots (1) \quad yz = y + z^2 + z \cdots \cdots (2) \quad z^3 + yz^2 + 2z^2 + xz - yz = 0 \cdots \cdots (3)$$

を解くのに、A君はつぎのようにして、4組の解をえた。この答えは正しいかどうか判定し、正しくないならば、どこをどう直せばよいか、A君の答えに加筆訂正せよ。

A君の答案

$$(1) \times y - (2) \times x \quad (y - x)z(z + 1) = 0$$

ゆえに、(イ) $z = 0$ 、または(ロ) $z = -1$ 、または(ハ) $x = y$

(イ) $z = 0$ のとき、(1) によって $x = 0$ 、(2) によって $y = 0$

ゆえに $x = 0$ 、 $y = 0$ 、 $z = 0$ は解の1つである。

(ロ) $z = -1$ のとき、(1) によって $x = 0$ 、(2) によって $y = 0$

ゆえに $x = 0$ 、 $y = 0$ 、 $z = -1$ は解の1つである。

(ハ) $x = y$ のとき、(3) から $z^3 + yz^2 + 2z^2 = 0$

$z = 0$ は(イ)で既に吟味したから、 $z \neq 0$ とすれば、上式から

$$z + y + 2 = 0 \text{ すなわち } z = -(y + 2)$$

これを(2)に代入して、 $-y(y + 2) = y + (y + 2)^2 - (y + 2)$

$$\therefore 2y^2 + 6y + 2 = 0, \text{ すなわち } y^2 + 3y + 1 = 0 \therefore y = \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$z = -(y + 2) \text{ であったから, } z = \frac{-7 \mp \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、 $y = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、 $z = \frac{-7 \mp \sqrt{5}}{2}$ (複号同順) も解である。