

6 関数  $y = f(x)$  ( $x \geq 0$ ) は次の条件①, ②を満たしている.

①  $f(x)$  は微分可能で  $f'(x)$  は連続, かつ  $f(x) > 0$

② 正の定数  $a$  があって  $\int_0^x (f(t))^{-a} dt = \int_a^{f(x)} (e^{-\frac{t^2}{2}} + t^{-a}) dt$

(1) ②の等式の両辺を  $x$  について微分して得られる ( $y$  の満たす) 微分方程式を書け.  
また  $f(0)$  の値を求めよ.

(2) 正の定数  $b, c$  があって次の不等式 (イ), (ロ) を満たしていることを示せ.

(イ)  $b \leq f'(x) \leq 1$

(ロ)  $0 \leq f(x) \left( \frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  を求めよ. また  $f'(x)$  の最小値を求めよ.