

1 0 でない x の整式 $f(x)$ に対し, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$ とおく. ある定数 p, q が存在して, $F(G(x)) = -\{F(x)\}^2 + pG(x) + q$ が成立しているとする.

(1) $a = \int_0^1 f(t)dt$ とおくととき, $F(x)$ を a を用いて表わせ.

(2) さらに, $0 \leq x \leq 1$ での $F(x)$ の最大値が $\frac{1}{2}$ であるとき, $f(x)$ を求めよ.