

2 O を中心とする円周上に相異なる 3 点 A_0, B_0, C_0 が時計回りの順に置かれている．自然数 n に対し，点 A_n, B_n, C_n を次の規則で定めていく．

(イ) A_n は弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ を 2 等分する点である．(ここで弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ は他の点 C_{n-1} を含まないほうを考える．以下においても同様である．)

(ロ) B_n は弧 $B_{n-1}C_{n-1}$ を 2 等分する点である．

(ハ) C_n は弧 $C_{n-1}A_{n-1}$ を 2 等分する点である．

$\angle A_nOB_n$ の大きさを α_n とする．ただし， $\angle A_nOB_n$ は点 C_n を含まないほうの弧 A_nB_n の中心角を表す．

(1) すべての自然数 n に対して $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$ であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して $\alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$ であることを示せ．

(3) α_{3n} を α_0 で表せ．