

5 曲線  $C: y = \cos^3 x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ),  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれる図形の面積を  $S$  とする.  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  とし,  $C$  上の点  $Q(t, \cos^3 t)$  と原点  $O$ , および  $P(t, 0)$ ,  $R(0, \cos^3 t)$  を頂点にもつ長方形  $OPQR$  の面積を  $f(t)$  とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1)  $S$  を求めよ.

(2)  $f(t)$  は最大値をただ 1 つの  $t$  でとることを示せ. そのときの  $t$  を  $\alpha$  とすると,

$$f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha} \text{ であることを示せ.}$$

(3)  $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$  を示せ.