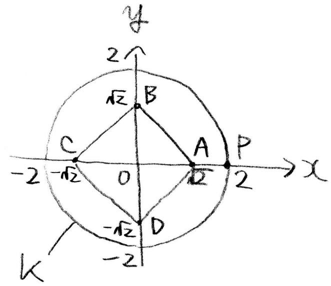
東工大　1991後期　②



xy平面で考える

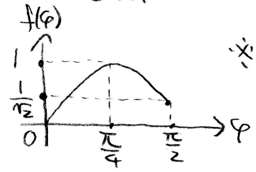
左図のようにK, ABCD, Pをとり、ABCDを原点を中心にφ $(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2})$回転させることを考える

このとき A, B　の座標は

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

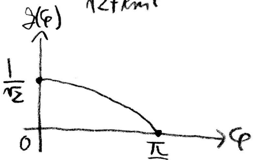
$$\tan\angle APO = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2-\sqrt{2}\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}-\cos\varphi}, \quad \tan\angle BPO = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2+\sqrt{2}\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}+\sin\varphi},$$

$f(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}-\cos\varphi}$ とすると、$f'(\varphi) = \frac{\cos\varphi(\sqrt{2}-\cos\varphi) - \sin\varphi \cdot \sin\varphi}{(\sqrt{2}-\cos\varphi)^2} = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi - 1}{(\sqrt{2}-\cos\varphi)^2}$　$f'(\varphi)=0$ のとき、$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$



※ $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2-1} = 1$　　$f(\varphi)$のグラフは左図のようになる ―①

$g(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}+\sin\varphi}$ とすると、$g'(\varphi) = \frac{-\sin\varphi(\sqrt{2}+\sin\varphi) - \cos\varphi \cdot \cos\varphi}{(\sqrt{2}+\sin\varphi)^2} = \frac{-\sqrt{2}\sin\varphi - 1}{(\sqrt{2}+\sin\varphi)^2} < 0$



$g(\varphi)$のグラフは左図のようになる ―②

①②より、$f(\varphi)$と$g(\varphi)$の交点のφ座標は $\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}-\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}+\sin\varphi}$, $\sqrt{2}\sin\varphi + \sin^2\varphi = \sqrt{2}\cos\varphi - \cos^2\varphi$.

$2(\sin\varphi\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1$, $\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$, $\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{3-2}{12}\pi = \frac{\pi}{12}$ より、$\frac{\pi}{12}$ であり、

このとき $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$, $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ より、$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ より、$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ より

$$\tan\angle APO = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4-\sqrt{3}-1} = \frac{\cancel{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}(\cancel{\sqrt{3}-1})} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \angle APO = \frac{\pi}{6}$$

よって Pから $y \geqq 0$ の側に引いた半直線の、θ の最大値は $\frac{\pi}{6}$ ―③

φが0から$\frac{\pi}{2}$まで動くときのCの動きは、φが$\frac{\pi}{2}$から0まで動くときのBの動きをx軸に関して対称にしたものであり、

φが0から$\frac{\pi}{2}$まで動くときのDの動きは、φが$\frac{\pi}{2}$から0まで動くときのAの動きをx軸に関して対称にしたものであるから

Pから $y \leqq 0$ の側に引いた半直線の、θ の最大値も $\frac{\pi}{6}$ ―④

③④より、求める値は $\frac{\pi}{6}$