東工大　1992前期　①

(i) $x^2+2x+k^2=0$ を満たす x が存在するとき，$1-k^2 \geqq 0$，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき

$x^2+2x+k^2=0$ のとき，$x=-1\pm\sqrt{1-k^2}$

このとき，$x^2-2x+k^2=1\mp2\sqrt{1-k^2}+1-\cancel{k^2}+2\mp2\sqrt{1-k^2}+\cancel{k^2}=4\mp4\sqrt{1-k^2}$

$4+4\sqrt{1-k^2}\neq0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to(-1-\sqrt{1-k^2})-0}\frac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$，$\displaystyle\lim_{x\to(-1-\sqrt{1-k^2})+0}\frac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ は，$-\infty$ または ∞

よって $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ は 1以外の整数値をとる

(ii) $x^2+2x+k^2=0$ を満たす x が存在しないとき，$1-k^2<0$，$k>1$ のとき

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}$ が $0<f(x)<2$ であればよい

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2+2x+k^2)-(x^2-2x+k^2)(2x+2)}{(x^2+2x+k^2)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+4x^2+\cancel{2k^2x}-2x^2-\cancel{4x}-2k^2-\cancel{2x^3}-2x^2+4x^2+\cancel{4x}-\cancel{2k^2x}-2k^2}{(x^2+2x+k^2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4k^2}{(x^2+2x+k^2)^2}$$

，$f'(x)=0$ のとき，$x=\pm k$

x	$-\infty$	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{k+1}{k-1}$	$\searrow$	$\frac{k-1}{k+1}$	$\nearrow$	1

$f(x)$ の増減表は左表のようになる

よって，$\dfrac{k+1}{k-1}<2$，$k+1<2k-2$，$k>3$

かつ $\dfrac{k-1}{k+1}>0$，$k>1$，

，$k>3$ であればよい

※ $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{k^2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{k^2}{x^2}}=1$

$f(\pm k)=\dfrac{k^2\mp2k+k^2}{k^2\pm2k+k^2}=\dfrac{2k\mp2}{2k\pm2}=\dfrac{k\mp1}{k\pm1}$

(i)(ii) より，$k>3$