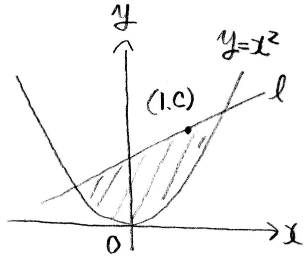
東工大　1992前期　③



lの傾きをkとすると、lの方程式は $y-C=k(x-1)$、$y=kx-k+C$ とおける。

lと$y=x^2$の交点のx座標をα, β $(\alpha<\beta)$とする。

$x^2=kx-k+C$、$x^2-kx+k-C=0$ より、$\alpha+\beta=k$、$\alpha\beta=k-C$

lと$y=x^2$で囲まれる図形の面積を$S(k)$とすると、

$$S(k)=\int_\alpha^\beta (kx-k+C-x^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+k\frac{x^2}{2}+(-k+C)x\right]_\alpha^\beta=-\frac{1}{3}\beta^3+\frac{1}{2}k\beta^2+(-k+C)\beta+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}k\alpha^2-(-k+C)\alpha$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{1}{2}k(\beta^2-\alpha^2)+(-k+C)(\beta-\alpha)=-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\beta\alpha(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}k(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+(-k+C)(\beta-\alpha)$$

※ $(\beta-\alpha)^3=\beta^3-3\beta^2\alpha+3\beta\alpha^2-\alpha^3=\beta^3-\alpha^3-3\beta\alpha(\beta-\alpha)$

$$=\left\{-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2-\beta\alpha+\frac{1}{2}k(\beta+\alpha)+(-k+C)\right\}(\beta-\alpha)=\left(-\frac{1}{3}k^2+\frac{4}{3}k-\frac{4}{3}C-k+C+\frac{1}{2}k^2-k+C\right)\sqrt{k^2-4k+4C}$$

※ $(\beta-\alpha)^2=\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2=(\beta+\alpha)^2-4\beta\alpha=k^2-4k+4C$

$\beta-\alpha=\sqrt{k^2-4k+4C}$

$$=\left(\frac{1}{6}k^2-\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}C\right)\sqrt{k^2-4k+4C}=\frac{1}{6}(k^2-4k+4C)\sqrt{k^2-4k+4C}=\frac{1}{6}(k^2-4k+4C)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(k-2)^2+4(C-1)\}^{\frac{3}{2}}$$

よって $k=2$ のとき最小面積 $\frac{1}{6}8(C-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}(C-1)^{\frac{3}{2}}$ をとる。