

東工大 1992後期 ①

(i) $x \leq 0$ のとき, $0 \leq t \leq 1$ のとき $t-x \geq 0 \neq 1$ $|t-x| = t-x$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t-x}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt - x \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [t - \log_2(t+1)]_0^1 - x [\log_2(t+1)]_0^1$$

$$= 1 - \log_2 2 - x \log_2 2, \quad \text{これは } x=0 \text{ のとき 最大値 } 1 - \log_2 2 \text{ をとる.}$$

(ii) $x \geq 1$ のとき, $0 \leq t \leq 1$ のとき $t-x \leq 0 \neq 1$ $|t-x| = -t+x$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{-t+x}{t+1} dt = -\int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt + x \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = -[t - \log_2(t+1)]_0^1 + x [\log_2(t+1)]_0^1$$

$$= -1 + \log_2 2 + x \log_2 2. \quad \text{これは } x=1 \text{ のとき 最大値 } -1 + 2\log_2 2 \text{ をとる.}$$

(iii) $0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq t \leq x$ のとき $t-x \leq 0 \neq 1$ $|t-x| = -t+x$
 $x \leq t \leq 1$ のとき $t-x \geq 0 \neq 1$ $|t-x| = t-x$

$$F(x) = \int_0^x \frac{-t+x}{t+1} dt + \int_x^1 \frac{t-x}{t+1} dt = -\int_0^x \frac{t+1-1}{t+1} dt + x \int_0^x \frac{1}{t+1} dt + \int_x^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt - x \int_x^1 \frac{1}{t+1} dt$$

$$= -[t - \log_2(t+1)]_0^x + x [\log_2(t+1)]_0^x + [t - \log_2(t+1)]_x^1 - x [\log_2(t+1)]_x^1$$

$$= -x + \log_2(x+1) + x \log_2(x+1) + 1 - \log_2 2 - x + \log_2(x+1) - x \log_2 2 + x \log_2(x+1)$$

$$= (2x+2)\log_2(x+1) - 2x - x \log_2 2 + 1 - \log_2 2$$

$$F'(x) = 2\log_2(x+1) + (2x+2) \frac{1}{x+1} - 2 - \log_2 2 = 2\log_2(x+1) + 2 - 2 - \log_2 2 = \log_2 \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$F'(x) = 0 \text{ のとき, } \frac{(x+1)^2}{2} = 1, \quad x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \neq 1 \quad x = -1 + \sqrt{2}$$

x	0	...	$-1 + \sqrt{2}$...	1
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$	$1 - \log_2 2$	\searrow	$3 - 2\sqrt{2}$	\nearrow	$2\log_2 2 - 1$

$F(x)$ の増減表は左表のようになる

$F(x)$ は $x = -1 + \sqrt{2}$ のとき 最大値 $3 - 2\sqrt{2}$ をとる.

$$* F(-1 + \sqrt{2}) = (-x + 2\sqrt{2} + x)\log_2 \sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + \log_2 2 - \sqrt{2} \log_2 2 + 1 - \log_2 2$$

$$= \sqrt{2} \log_2 2 + 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \log_2 2$$

$$F(1) = 4\log_2 2 - 2 - \log_2 2 + 1 - \log_2 2 = 2\log_2 2 - 1$$

(i)(ii)(iii) より, $F(x)$ の最大値は $3 - 2\sqrt{2}$