東工大　1993前期　③　(1/2)

(1) PでのCの接線の方程式は

$$y-(t^4-2at^2)=(4t^3-4at)(x-t),\quad y=(4t^3-4at)x-4t^4+4at^2+t^4-2at^2,\quad y=(4t^3-4at)x-3t^4+2at^2$$

$$x^4-2ax^2=(4t^3-4at)x-3t^4+2at^2$$
$$x^4-2ax^2+(-4t^3+4at)x+3t^4-2at^2=0$$
$$(x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-2a)=0$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+2tx+3t^2-2a \\
x^2-2tx+t^2\,) & x^4 \quad -2ax^2+(-4t^3+4at)x+3t^4-2at^2 \\
 & x^4-2tx^3+t^2x^2 \\ \hline
 & 2tx^3+(-t^2-2a)x^2+(-4t^3+4at)x \\
 & 2tx^3 \quad -4t^2x^2+\quad 2t^3x \\ \hline
 & (3t^2-2a)x^2+(-6t^3+4at)x+3t^4-2at^2 \\
 & (3t^2-2a)x^2+(-6t^3+4at)x+3t^4-2at^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

α, β は $x^2+2tx+3t^2-2a=0$ の異なる2つの実数解であるから

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2t$, $\alpha\beta=3t^2-2a$

(2) $y'=4x^3-4ax=4x(x^2-a)$　$y'=0$ のとき $x=0, \pm\sqrt{a}$

$y''=12x^2-4a=12(x^2-\frac{a}{3})$　$y''=0$ のとき $x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

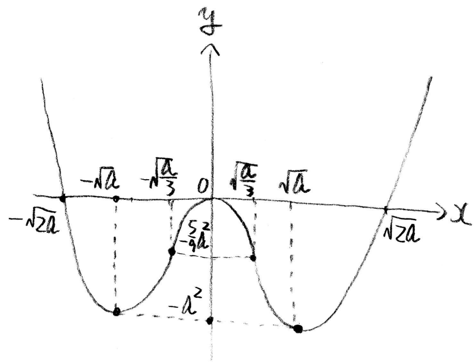
x	…	$-\sqrt{a}$	…	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	…	0	…	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	…	$\sqrt{a}$	…
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
y	↘	$-a^2$	↗	$-\frac{5}{9}a^2$	↗	0	↘	$-\frac{5}{9}a^2$	↘	$-a^2$	↗

Cの増減表は左表のようになる

Cのグラフは右図のようになる。

※ $y(\pm\sqrt{a})=a^2-2a\cdot a=-a^2$, $y(\pm\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{a^2}{9}-2a\frac{a}{3}=-\frac{5}{9}a^2$

※ $y=0$ のとき $x^2(x^2-2a)=0$. $x=0, \pm\sqrt{2a}$



よって $-\sqrt{\frac{a}{3}}<t<\sqrt{\frac{a}{3}}$

(3) $L^2=(\beta-\alpha)^2+(\beta^4-2a\beta^2-\alpha^4+2a\alpha^2)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+\{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2)-2a(\beta^2-\alpha^2)\}^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+(\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)^2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2a\}^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2a\}^2$

$=4t^2-12t^2+8a+(4t^2-12t^2+8a)4t^2(4t^2-6t^2+4a-2a)^2$

$=-8t^2+8a+(-8t^2+8a)4t^2(-2t^2+2a)^2$

$=-8\{t^2-a+(4t^4-4at^2)(4t^4-8at^2+4a^2)\}$

$=-8(t^2-a+16t^8-32at^6+16a^2t^4-16at^6+32a^2t^4-16a^3t^2)$

$=-8\{16t^8-48at^6+48a^2t^4+(-16a^3+1)t^2-a\}$

(4) $f(T)=16T^4-48aT^3+48a^2T^2+(-16a^3+1)T-a$ $(0\leqq T\leqq a)$ とする

$$f'(T)=2^6T^3-2^4\cdot3^2aT^2+2^5\cdot3a^2T-2^4a^3+1$$

$$=2^6T^3-\cancel{2^4}\cdot\cancel{3^2}\frac{7}{\cancel{2\cdot3}}T^2+\cancel{2^5}\cdot\cancel{3}\frac{7^2}{\cancel{2^4\cdot3^2}}T-\cancel{2^4}\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}+1$$

$$=2^6T^3-2^2\cdot3\cdot7T^2+\frac{2\cdot7^2}{3}T-\frac{7^3}{2^2\cdot3^3}+1$$

$f'(T)=0$のとき $2^8\cdot3^3T^3-2^4\cdot3^4\cdot7T^2+2^3\cdot3^2\cdot7^2T-7^3+2^2\cdot3^3=0$

$2^2\cdot3T=X$とおくと $4X^3-63X^2+294X-235=0$

$(X-1)(4X^2-59X+235)=0$

$59^2-4\cdot4\cdot235=-279<0$ より $X=1,\ T=\frac{1}{12}$

T	$\cdots$	$\frac{1}{12}$	$\cdots$
$f'(T)$	$-$	0	$+$
$f(T)$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

$f(T)$の増減表は左表のようになる。

$f(T)$の最小値は $-\frac{2}{3}$

※ $f\left(\frac{1}{12}\right)=2^4\frac{1}{2^8\cdot3^4}-2^4\cdot\cancel{3}\frac{7}{2\cdot\cancel{3}}\frac{1}{2^6\cdot3^3}+2^4\cdot\cancel{3}\frac{7^2}{2^2\cdot3^2}\frac{1}{2^4\cdot3^2}+\left(-2^4\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}+1\right)\frac{1}{2^2\cdot3}-\frac{7}{2\cdot3}$

$$=\frac{1}{2^4\cdot3^4}-\frac{7}{2^4\cdot3^3}+\frac{7^2}{2^4\cdot3^3}-\frac{7^3}{2^4\cdot3^4}+\frac{1}{2^2\cdot3}-\frac{7}{2\cdot3}$$

$$=\frac{1-3\cdot7+3\cdot7^2-7^3+2^2\cdot3^3-7\cdot2^3\cdot3^3}{2^4\cdot3^4}=\frac{1-21+147-343+108-756}{2^4\cdot3^4}$$

$$=\frac{256-1120}{2^4\cdot3^4}=-\frac{864}{2^4\cdot3^4}=-\frac{2^5\cdot3^3}{2^4\cdot3^4}=-\frac{2}{3}$$

よって L^2の最大値は $\frac{16}{3}$、Lの最大値は $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$49\times6=294$　$49\times7=343$　$27\times4=108$　$343-108=235$

$(4X^3-63X^2+294X-235)\div(X-1)=4X^2-59X+235$
$4X^3-4X^2$
$-59X^2+294X$
$-59X^2+59X$
$235X-235$
$235X-235$
0

$59\times59=3481$　$235\times16=3760$　$3760-3481=279$

$49\times3=147$　$27\times4=108$　$108\times7=756$

$756+364=1120$　$1120-256=864$

$864=2\cdot432=2^2\cdot216=2^3\cdot108=2^4\cdot54=2^5\cdot27=2^5\cdot3\cdot9=2^5\cdot3^2\cdot3$