東工大 1993後期 ②

(1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\0&4\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}4&4\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&12\\0&8\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}8&12\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&32\\0&16\end{pmatrix}$

$a_n=2^n$, $c_n=0$, $d_n=2^n$ と予想すると、$\begin{pmatrix}2^{n-1}&b_{n-1}\\0&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&b_n\\0&2^n\end{pmatrix}$

$b_n=2^{n-1}+2b_{n-1}$, $\frac{b_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}$, $\frac{b_n}{2^n}=B_n$ とおくと. $B_n=\frac{1}{2}+B_{n-1}$

$$\begin{aligned}
B_n-\cancel{B_{n-1}}&=\tfrac{1}{2}\\
\cancel{B_{n-1}}-\cancel{B_{n-2}}&=\tfrac{1}{2}\\
&\vdots\\
+)\ \cancel{B_2}-B_1&=\tfrac{1}{2}\\
\hline
B_n-B_1&=\tfrac{1}{2}(n-1)
\end{aligned}$$

$B_1=\frac{1}{2}$ より. $B_n=\frac{1}{2}n$, $b_n=2^{n-1}\cdot n$ と予想できる.

$A^1=\begin{pmatrix}2^1&2^{1-1}\cdot1\\0&2^1\end{pmatrix}$ —①

$n=k$ のとき. $A^k=\begin{pmatrix}2^k&2^{k-1}\cdot k\\0&2^k\end{pmatrix}$ と仮定すると.

$A^{k+1}=\begin{pmatrix}2^k&2^{k-1}\cdot k\\0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&2^k+2^k\cdot k\\0&2^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&2^{(k+1)-1}\cdot(k+1)\\0&2^{k+1}\end{pmatrix}$ —②

①②より.数学的帰納法より. $\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&2^{n-1}\cdot n\\0&2^n\end{pmatrix}$

(2) 常に $\gamma_n=0$ である —③

$n=6m+k$ ($m=0.1.2\cdots$, $k=0,1,2,3,4,5$, ただし $k=0$ のとき $m\neq0$) とする.

$2^n=2^{6m+k}=(3\cdot21+1)^m\cdot2^k=2^k\sum_{l=0}^{m}{}_mC_l(3\cdot21)^l=2^k\cdot3\cdot21\sum_{l=1}^{m}{}_mC_l(3\cdot21)^{l-1}+2^k$

$k=0.1.2.3.4.5$ のとき. $2^k=1,2,4,8,16,32$

よって. $\alpha_n=1$, $\delta_n=1$ のとき $k=0.2.4$ —④

$2^{n-1}\cdot n=2^{6m+k-1}\cdot(6m+k)=(3\cdot21+1)^m\cdot2^{k-1}\cdot(6m+k)=2^{k-1}\cdot(6m+k)\sum_{l=0}^{m}{}_mC_l(3\cdot21)^l$

$=2^{k-1}\cdot(6m+k)3\cdot21\sum_{l=1}^{m}{}_mC_l(3\cdot21)^{l-1}+2^{k-1}\cdot2\cdot3m+2^{k-1}\cdot k$

$k=0.1.2.3.4.5$ のとき. $2^{k-1}\cdot k=0,1,4,12,32,80$

よって $\beta_n=0$ のとき $k=0.4$ —⑤

③④⑤より. $\begin{pmatrix}\alpha_n&\beta_n\\\gamma_n&\delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ のとき. $k=0$, $n=6m$ ($m=1,2\cdots$)

よって題意は示された.