東工大　1994後期 ②

$(2-\sqrt{3})^1=2-1\cdot\sqrt{3}$ ―①

kをある自然数として $(2-\sqrt{3})^k=\alpha_k-\beta_k\sqrt{3}$ (α_k, β_k は自然数) と書けると仮定すると.

$(2-\sqrt{3})^{k+1}=(\alpha_k-\beta_k\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2\alpha_k-\alpha_k\sqrt{3}-2\beta_k\sqrt{3}+3\beta_k=(2\alpha_k+3\beta_k)-(\alpha_k+2\beta_k)\sqrt{3}$

ここで $2\alpha_k+3\beta_k$, $\alpha_k+2\beta_k$ は自然数である ―②

①②より数学的帰納法により $(2-\sqrt{3})^n=\alpha_n-\beta_n\sqrt{3}$ (α_n, β_n は自然数) と書け

$\alpha_{n+1}=2\alpha_n+3\beta_n$, $\beta_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n$ である ―③

$\alpha_1^2=2^2=4$, $3\beta_1^2=3\cdot1^2=4-1$ ―④

kをある自然数として $\alpha_k^2=m_k$, $3\beta_k^2=m_k-1$ (m_kは自然数) と書けると仮定すると.

③より $\alpha_{k+1}^2=4\alpha_k^2+12\alpha_k\beta_k+9\beta_k^2=4m_k+12\alpha_k\beta_k+3m_k-3=7m_k+12\alpha_k\beta_k-3$

$3\beta_{k+1}^2=3\alpha_k^2+12\alpha_k\beta_k+12\beta_k^2=3m_k+12\alpha_k\beta_k+4m_k-4=(7m_k+12\alpha_k\beta_k-3)-1$

ここで $7m_k+12\alpha_k\beta_k-3$ は自然数である ―⑤

④⑤より数学的帰納法により $\alpha_n^2=m_n$, $3\beta_n^2=m_n-1$ (m_nは自然数) と書ける.

よって $(2-\sqrt{3})^n=\alpha_n-\beta_n\sqrt{3}=\sqrt{\alpha_n^2}-\sqrt{3\beta_n^2}=\sqrt{m_n}-\sqrt{m_n-1}$

故に 題意は示された.