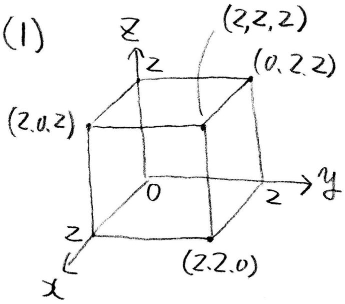
東工大　1995後期　①

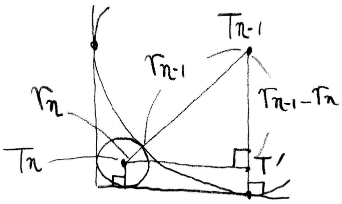
(1)



xyz空間で考える

左図の立方体をC_0とみる

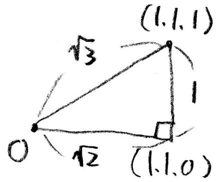
S_nの中心をT_nとすると、T_nはOと$(2,2,2)$を通る直線上にある



S_nの半径をr_nとする

平面$x=y$による左上図の断面は左図のようになる

左図のようにT'をとる



$\triangle T_{n-1}T_nT'$は、左図の、$(1,1,1)$, O, $(1,1,0)$によって作られる三角形と相似であるから

$\sqrt{3}(r_{n-1}-r_n)=r_{n-1}+r_n$,　$(\sqrt{3}-1)r_{n-1}=(\sqrt{3}+1)r_n$

$$r_n=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}r_{n-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}r_{n-1}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}r_{n-1}=(2-\sqrt{3})r_{n-1}$$

$$=(2-\sqrt{3})^2r_{n-2}=\cdots=(2-\sqrt{3})^nr_0$$

$r_0=1$より　$r_n=(2-\sqrt{3})^n$

(2) S_nの体積をV_nとすると、$V_n=\frac{4}{3}\pi(2-\sqrt{3})^{3n}=\frac{4}{3}\pi(8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3})^n=\frac{4}{3}\pi(26-15\sqrt{3})^n$

$$\sum_{k=0}^{n}V_k=\frac{4}{3}\pi\frac{1-(26-15\sqrt{3})^{n+1}}{1-(26-15\sqrt{3})}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}V_k=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{1-(26-15\sqrt{3})}=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{-25+15\sqrt{3}}=\frac{4}{15}\pi\frac{3\sqrt{3}+5}{(3\sqrt{3}-5)(3\sqrt{3}+5)}=$$

$$=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{15}\pi\frac{3\sqrt{3}+5}{\cancel{27-25}}=\frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi$$

よって求める体積は　$8-\frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi$