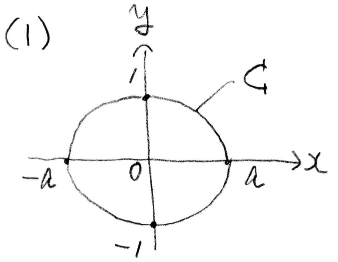
東工大 1995後期 ②

(1)



(i) $|X| \neq a,\ |Y| \neq 1$ のとき

P を通り, 傾きが k の直線の方程式は, $y-Y=k(x-X)$, $y=kx-kX+Y$

これが C と接するとき, $\frac{x^2}{a^2}+k^2x^2+2k(-kX+Y)x+k^2X^2-2kXY+Y^2-1=0$

$\left(\frac{1}{a^2}+k^2\right)x^2+2(-k^2X+kY)x+k^2X^2-2kXY+Y^2-1=0$ が重解を持てばよく,

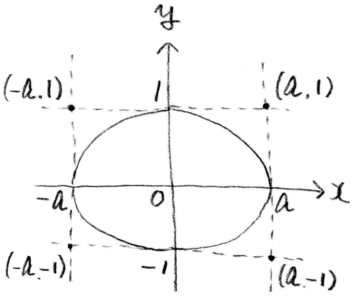
k が $\cancel{k^4X^2}-\cancel{2k^3XY}+\cancel{k^2Y^2}=\frac{k^2X^2}{a^2}-\frac{2kXY}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}+\cancel{k^4X^2}-\cancel{2k^3XY}+\cancel{k^2Y^2}-k^2=0$

$\left(\frac{X^2}{a^2}-1\right)k^2-2\frac{XY}{a^2}k+\frac{Y^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=0$ —① を満たせばよい.

$\cancel{\frac{X^2Y^2}{a^4}}-\cancel{\frac{X^2Y^2}{a^4}}+\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{X^2}{a^2}+Y^2>1$ のとき.

①は異なる2つの実数解を持ち, これを α, β とすると, $\alpha\beta=\dfrac{\frac{Y^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{X^2}{a^2}-1}$

$\alpha\beta=-1$ であればよいから $Y^2-1=-X^2+a^2$, $X^2+Y^2=a^2+1$

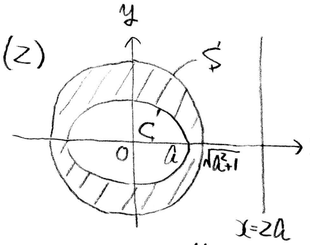


(ii) $|X|=a$ または $|Y|=1$ のとき

C への2接線が直交するような点は左図の4点である.

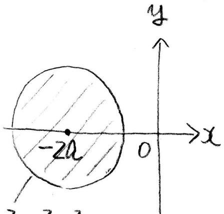
(i)(ii)より, P の軌跡は $x^2+y^2=a^2+1$

(2)



$2a>\sqrt{a^2+1}$ のとき $4a^2>a^2+1$, $3a^2>1$, $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$a \geqq 1$ より $2a>\sqrt{a^2+1}$



$(x+2a)^2+y^2=a^2+1$

$(x+2a)^2=a^2+1-y^2$

$x+2a=\pm\sqrt{a^2+1-y^2}$

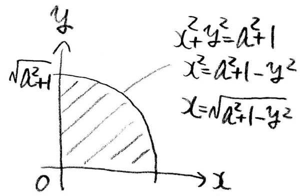
$x=-2a\pm\sqrt{a^2+1-y^2}$

左図の斜線部を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_1 とすると,

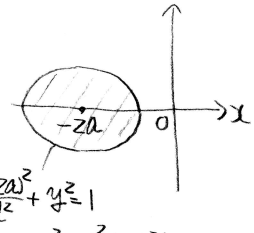
$\frac{V_1}{2}\frac{1}{\pi}=\int_0^{\sqrt{a^2+1}}\left(-2a-\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2dy-\int_0^{\sqrt{a^2+1}}\left(-2a+\sqrt{a^2+1-y^2}\right)^2dy$

$=2\int_0^{\sqrt{a^2+1}}4a\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy=8a\int_0^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy$

ここで $\int_0^{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{a^2+1-y^2}\,dy$ は右図の斜線部の面積に等しいから



$V_1=2\pi\cdot\overset{2}{\cancel{8}}a\pi(a^2+1)\frac{1}{\cancel{4}}=(4a^3+4a)\pi^2$



$\frac{(x+2a)^2}{a^2}+y^2=1$

$(x+2a)^2=a^2(1-y^2)$

$x+2a=\pm a\sqrt{1-y^2}$

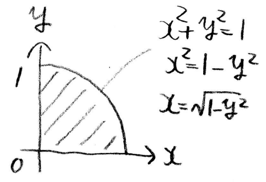
$x=-2a\pm a\sqrt{1-y^2}$

左図の斜線部を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

$\frac{V_2}{2}\frac{1}{\pi}=\int_0^1\left(-2a-a\sqrt{1-y^2}\right)^2dy-\int_0^1\left(-2a+a\sqrt{1-y^2}\right)^2dy$

$=2\int_0^1 4a^2\sqrt{1-y^2}\,dy=8a^2\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$

ここで $\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ は右図の斜線部の面積に等しいから



$V_2=2\pi\cdot\overset{2}{\cancel{8}}a^2\cdot\pi\frac{1}{\cancel{4}}=4a^2\pi$

よって, 求める体積は $V_1-V_2=(4a^3-4a^2+4a)\pi^2=4a(a^2-a+1)\pi^2$