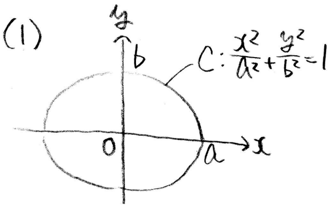
東工大　1996 前期　②

(1)



x軸方向に$\frac{1}{a}$倍 y軸方向に$\frac{1}{b}$倍する，原点を中心にφ回転させる，x軸方向にa倍 y軸方向にb倍する を組み合わせた1次変換

すなわち $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos\varphi & -a\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{a}{b}\sin\varphi \\ \frac{b}{a}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

で表される1次変換では

C上の点はC上の点にうつる ―①

C上の点$(a, 0)$がC上の点にうつるには $\begin{pmatrix} \cos\theta & -q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ ar \end{pmatrix}$ より $\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{a^2r^2}{b^2}=1$，$\frac{a^2r^2}{b^2}=\sin^2\theta$，$r=\frac{b}{a}\sin\theta$

C上の点$(0, b)$がC上の点にうつるには $\begin{pmatrix} \cos\theta & -q \\ \frac{b}{a}\sin\theta & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -bq \\ bs \end{pmatrix}$ より $\frac{b^2q^2}{a^2}+\frac{b^2s^2}{b^2}=1$，$\frac{b^2q^2}{a^2}+s^2=1$ ―②

C上の点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$がC上の点にうつるには $\begin{pmatrix} \cos\theta & -q \\ \frac{b}{a}\sin\theta & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a\cos\theta-bq}{\sqrt{2}} \\ \frac{b\sin\theta+bs}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ より

$\frac{a^2\cos^2\theta-2abq\cos\theta+b^2q^2}{2a^2}+\frac{b^2\sin^2\theta+2b^2s\sin\theta+b^2s^2}{2b^2}=1$，$\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{bq\cos\theta}{a}+\frac{b^2q^2}{2a^2}+\frac{\sin^2\theta}{2}+s\sin\theta+\frac{s^2}{2}=1$，$-\frac{bq\cos\theta}{a}+\frac{b^2q^2}{2a^2}+s\sin\theta+\frac{s^2}{2}=\frac{1}{2}$ ―③

②③より $-\frac{bq\cos\theta}{a}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{s^2}{2}}+s\sin\theta+\cancel{\frac{s^2}{2}}=\cancel{\frac{1}{2}}$　$s=\frac{bq\cos\theta}{a\sin\theta}$

$\frac{b^2q^2}{a^2}+\frac{b^2q^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}=1$　$\frac{b^2q^2}{a^2}\frac{1}{\sin^2\theta}=1$．$q=\frac{a}{b}\sin\theta$，$s=\frac{b\cos\theta}{\cancel{a}\cancel{\sin\theta}}\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\cancel{\sin\theta}=\cos\theta$

よって、C上の点はC上の点にうつる1次変換は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表されるものに限られる ―④

①④より $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ と書ける

$A^n=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{n\text{個}}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

↓　　　　n個 → これは原点を中心にθ回転させる1次変換をn回繰り返したもの、とみれる。

$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos n\theta & -a\sin n\theta \\ b\sin n\theta & b\cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\frac{a}{b}\sin\theta \\ \frac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$