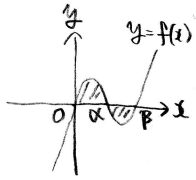
東工大　1996前期　③

(1) $f(1)=1$ より　$P(1-\alpha)(1-\beta)=1$ —①

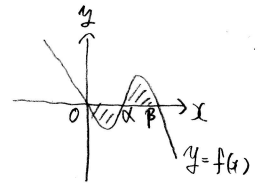
$f(x)=P\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}$，$f'(x)=P\{9x^8-8(\alpha+\beta)x^7+7\alpha\beta x^6\}$，

$f'(1)=0$ より　$P\{9-8(\alpha+\beta)+7\alpha\beta\}=0$．$P\neq0$ より　$9-8(\alpha+\beta)+7\alpha\beta=0$ —②

$P>0$ のとき



$P<0$ のとき



題意より　$\int_0^\beta f(x)dx=0$

ここで　$\int_0^\beta\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}dx=\left[\frac{x^{10}}{10}-(\alpha+\beta)\frac{x^9}{9}+\alpha\beta\frac{x^8}{8}\right]_0^\beta=\frac{\beta^{10}}{10}-(\alpha+\beta)\frac{\beta^9}{9}+\alpha\beta\frac{\beta^8}{8}$ であるから

$P\neq0$，$\beta\neq0$ より　$\frac{\beta}{10}-\frac{\alpha+\beta}{9}+\frac{\alpha}{8}=0$ —③

③より　$\frac{9-10\beta}{90}=\frac{8-9\alpha}{72}$．$-\frac{1}{90}\beta=-\frac{1}{72}\alpha$．$\beta=\frac{5}{4}\alpha$

②より　$9-8(\alpha+\frac{5}{4}\alpha)+7\alpha\frac{5}{4}\alpha=0$．$36-72\alpha+35\alpha^2=0$

$\alpha=\frac{36\pm\sqrt{1296-1260}}{35}=\frac{36\pm6}{35}=\frac{30}{35},\frac{42}{35}=\frac{6}{7},\frac{6}{5}$　$\beta=\frac{5}{4}\frac{6}{7},\frac{5}{4}\frac{6}{5}=\frac{15}{14},\frac{3}{2}$

36 × 36 = 216 + 1080 = 1296

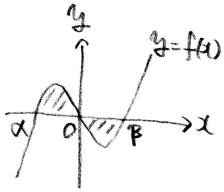
36 × 35 = 180 + 1080 = 1260

①より　$(\alpha,\beta)=(\frac{6}{7},\frac{15}{14})$ のとき　$P\frac{1}{7}(-\frac{1}{14})=1$　$P=-98$．$(\alpha,\beta)=(\frac{6}{5},\frac{3}{2})$ のとき．$P(-\frac{1}{5})(-\frac{1}{2})=1$．$P=10$

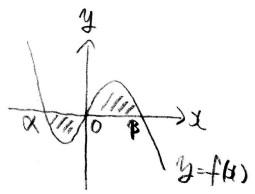
以上より　$f(x)=-98x^7(x-\frac{6}{7})(x-\frac{15}{14})$　または　$f(x)=10x^7(x-\frac{6}{5})(x-\frac{3}{2})$

(2)

$P>0$ のとき



$P<0$ のとき



題意より　$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

ここで　$\int_\alpha^\beta\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}dx=\left[\frac{x^{10}}{10}-(\alpha+\beta)\frac{x^9}{9}+\alpha\beta\frac{x^8}{8}\right]_\alpha^\beta=\frac{\beta^{10}}{10}-\frac{\alpha\beta^9}{9}-\frac{\beta^{10}}{9}+\frac{\alpha\beta^9}{8}-\frac{\alpha^{10}}{10}+\frac{\alpha^{10}}{9}+\frac{\alpha^9\beta}{9}-\frac{\alpha^9\beta}{8}$

$=\frac{-9+10}{90}\alpha^{10}+\frac{8-9}{72}\alpha^9\beta+\frac{-8+9}{72}\alpha\beta^9+\frac{9-10}{90}\beta^{10}=\frac{\alpha^{10}}{90}-\frac{\alpha^9\beta}{72}+\frac{\alpha\beta^9}{72}-\frac{\beta^{10}}{90}=\frac{\alpha^{10}-\beta^{10}}{90}-\alpha\beta\frac{\alpha^8-\beta^8}{72}$ —④ であるから

$\frac{\alpha^{10}-\beta^{10}}{90}-\alpha\beta\frac{\alpha^8-\beta^8}{72}=0$ —⑤

$\alpha\beta<0$ であるから，$|\alpha|>|\beta|$ のとき ④>0，$|\alpha|<|\beta|$ のとき ④<0．よって⑤より　$|\alpha|=|\beta|$，$\beta=-\alpha$

②より　$9+7\alpha(-\alpha)=0$．$\alpha^2=\frac{9}{7}$．$\alpha=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$．$\beta=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

①より　$P\frac{7+3\sqrt{7}}{7}\frac{7-3\sqrt{7}}{7}=1$．$P(49-63)=49$．$P=-\frac{49}{14}=-\frac{7}{2}$

以上より　$f(x)=-\frac{7}{2}x^7(x+\frac{3\sqrt{7}}{7})(x-\frac{3\sqrt{7}}{7})$