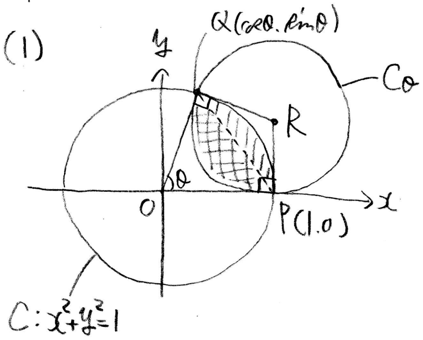
東工大　1996後期　①

(1)



C_θ の、Pにおける接線は $\overrightarrow{(1,0)}$ に平行、Qにおける接線は $\overrightarrow{(\cos\theta, \sin\theta)}$ に平行であるから

C_θ の中心をRとすると、Rは、$x=1$ と $y-\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$ の交点であり

$y-\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)$, $y=\frac{-\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ より $\left(1, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

左図の斜線部の面積は $\pi\frac{\theta}{2\pi}-\sin\theta\frac{1}{2}=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}$

$\angle POQ=\theta$, $\angle OPR=\angle OQR=\frac{\pi}{2}$ であるから $\angle PRQ=\pi-\theta$

よって左図の網線部の面積は $\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\frac{\pi-\theta}{2\pi}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)\frac{1}{2}=\frac{\pi-\theta-\sin\theta}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

ゆえに $S_\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}+\frac{\pi-\theta-\sin\theta}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

(2) A_θ は、PをRを中心に $-\frac{1}{2}(\pi-\theta)$ 回転させた点であるから、A_θ の座標を (x_θ, y_θ) とすると、

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+1 \\ \left(-\sin\frac{\theta}{2}+1\right)\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}+1 \\ \left(-\sin\frac{\theta}{2}+1\right)\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}}{\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}}}+1 \\ \left(-\sin\frac{\theta}{2}+1\right)\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}}{\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}+1 \\ \left(-\sin\frac{\theta}{2}+1\right)\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

よって、$y=x\frac{1-x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}=x\frac{1-x}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}=(1-x)\sqrt{\frac{x}{2-x}}$　$(0<x<1)$　—①

(3) (2)より、$0<\theta<\pi$ のとき x_θ は単調減少、$\theta=0, \pi$ のとき $y_\theta=0$ であるから、

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1(1-x)^2\frac{x}{2-x}dx=\int_0^1\frac{-x^3+2x^2-x}{x-2}dx=\int_0^1\frac{-x^2(x-2)-(x-2)-2}{x-2}dx=\int_0^1\left(-x^2-1-2\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x-2\log(2-x)\right]_0^1=-\frac{1}{3}-1+2\log 2=-\frac{4}{3}+2\log 2$$　,　$V=\left(-\frac{4}{3}+2\log 2\right)\pi$

↓

※ $0<x<1$ のとき $\frac{d}{dx}\log(2-x)=\frac{-1}{2-x}=\frac{1}{x-2}$