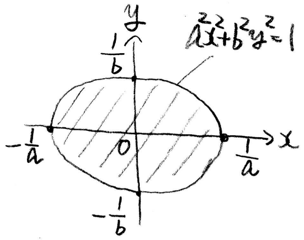
東工大 1997前期 ①

(i) $a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき



$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1$ を満たす (x, y) の集合は左図の斜線部であるから

$x=r\frac{1}{a}\cos\theta,\ y=r\frac{1}{b}\sin\theta \quad (0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける

任意の r, θ において $a(r\frac{1}{a}\cos\theta - 1)+b(r\frac{1}{b}\sin\theta - 1) \leqq 0$

$r\cos\theta - a + r\sin\theta - b \leqq 0,\ r\sqrt{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}) \leqq a+b$

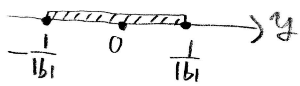
$\sqrt{2}r\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) \leqq a+b$ が成り立つには

$a+b \geqq \sqrt{2}$ であればよい

(ii) $a=0,\ b \neq 0$ のとき

(ii-i) $b>0$ のとき

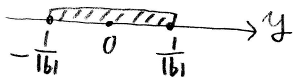
$b^2y^2 \leqq 1,\ |y| \leqq \frac{1}{|b|}$ を満たす任意の y について、$y \leqq 1$ であればよい



$\frac{1}{|b|} \leqq 1,\ b \geqq 1$ であればよい

(ii-ii) $b<0$ のとき

$b^2y^2 \leqq 1,\ |y| \leqq \frac{1}{|b|}$ を満たす任意の y について $y \geqq 1$ であればよい



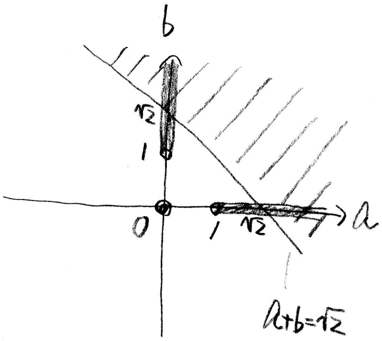
このような b は存在しない

(iii) $a \neq 0,\ b=0$ のとき

(ii)と同様に $a \geqq 1$ であればよい

(iv) $a=0,\ b=0$ のとき

これは題意を満たす



(i)(ii)(iii)(iv)より (a, b) の範囲は左図のようになる

境界線上の点含む