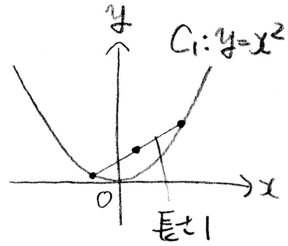
東工大　1997後期 ①



C_1上の点(α, α^2), (β, β^2) $(\alpha<\beta)$ と (α, α^2), (β, β^2) の中点(X, Y)を通り, 傾きがkの直線

$y-Y=k(x-X)$, $y=kx-kX+Y$ を考えると

$x^2=kx-kX+Y$, $x^2-kx+kX-Y=0$ より, $\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=kX-Y$

$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2=1$ のとき, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=1$

$k^2-4kX+4Y+k^2(k^2-4kX+4Y)=1$, $k^4-4Xk^3+(4Y+1)k^2-4Xk+4Y-1=0$

$X=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $X=\frac{k}{2}$, $k=2X$ より

$16X^4-32X^4+16X^2Y+4X^2-8X^2+4Y-1=0$, $16X^2Y+4Y=16X^4+4X^2+1$

$Y=\frac{(16X^2+4)X^2+1}{16X^2+4}=X^2+\frac{1}{16X^2+4}$ より C_2の軌跡は $y=x^2+\frac{1}{16x^2+4}$

$S_a=2\int_0^a\left(x^2+\frac{1}{16x^2+4}-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{4x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{1}{4\cdot\frac{1}{4}\tan^2\theta+1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}\,\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\frac{1}{4}\varphi$

$\downarrow$

$x=\frac{1}{2}\tan\theta$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to a \\ \theta & 0\to\varphi \end{array}$ ※φは $\frac{1}{2}\tan\varphi=a$ を満たす値

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}$

$a\to\infty$のとき $\varphi\to\frac{\pi}{2}$ であるから $\lim_{a\to\infty}S_a=\frac{\pi}{8}$