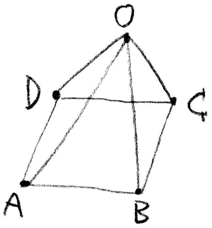
東工大　1997後期　②



対称性より X_n が A, B, C, D に一致する確率は等しい。

X_n が O に一致する確率を α_n，A または B または C または D に一致する確率を β_n，とする

$n \geqq 1$ のとき $\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{3}\beta_{n-1} & \text{—①} \\ \beta_n = \alpha_{n-1} + \frac{2}{3}\beta_{n-1} & \text{—②} \end{cases}$

①②より，$n \geqq 2$ のとき　$\beta_n = \frac{2}{3}\beta_{n-1} + \frac{1}{3}\beta_{n-2}$　　$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$，$3x^2 - 2x - 1 = 0$，$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} = -\frac{1}{3}, 1$

$\beta_n + \frac{1}{3}\beta_{n-1} = \beta_{n-1} + \frac{1}{3}\beta_{n-2} = \beta_{n-2} + \frac{1}{3}\beta_{n-3} = \cdots = \beta_1 + \frac{1}{3}\beta_0$，$\beta_0 = 0$，$\beta_1 = 1$ より，$\beta_n + \frac{1}{3}\beta_{n-1} = 1$ —③

$\beta_n - \beta_{n-1} = -\frac{1}{3}(\beta_{n-1} - \beta_{n-2}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2(\beta_{n-2} - \beta_{n-3}) = \cdots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(\beta_1 - \beta_0)$，$\beta_0 = 0$，$\beta_1 = 1$ より，$\beta_n - \beta_{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ —④

③④より，$\beta_n + \frac{1}{3}\left\{\beta_n - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = 1$，$\frac{4}{3}\beta_n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1$，$\beta_n = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ —⑤

⑤で，$n=0$ とすると $\beta_0 = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right\} = 0$，$n=1$ とすると $\beta_1 = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right\} = 1$，となるから，
⑤は $n = 0, 1$ のときも成り立つ。

①より，$\alpha_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{4}\left\{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ —⑥

$\alpha_0 = 1$ であり，⑥で $n=0$ とすると，$\alpha_0 = \frac{1}{4}\left\{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^0\right\} = 1$，となるから ⑥は $n=0$ のときも成り立つ。

以上より，X_n が O に一致する確率は　$\frac{1}{4}\left\{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$