東工大　1998前期 ③

(1) f_nが定義できるためには、$f(f_{n-1})=\frac{2f_{n-1}-1}{f_{n-1}}$が定義できればよいから、$f_n \neq 0$ $(n=0,1,2\cdots)$であればよい

$x_0=0$、$f(x_n)=x_{n-1}$ $(n=1,2\cdots)$で定義される数列x_nが存在するならば

$t \neq x_n$ $(n=0,1,2\cdots)$のときf_nが定義できる

$x_0=0$, $\frac{2x_1-1}{x_1}=0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $\frac{2x_2-1}{x_2}=\frac{1}{2}$, $4x_2-2=x_2$, $x_2=\frac{2}{3}$, $\frac{2x_3-1}{x_3}=\frac{2}{3}$, $6x_3-3=2x_3$, $x_3=\frac{3}{4}$

$x_n=\frac{n}{n+1}$ $(n=0,1,2\cdots)$と仮定する —①

$n=0$のとき①は成り立つ —②

$n=k$のとき①は成り立つと仮定すると $\frac{2x_{k+1}-1}{x_{k+1}}=\frac{k}{k+1}$ $(2k+2)x_{k+1}-k-1=kx_{k+1}$, $x_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ より

$n=k+1$のときも①は成り立つ —③

①②③より数学的帰納法より $x_n=\frac{n}{n+1}$ $(n=0,1,2\cdots)$

よって求める条件は $t \neq \frac{n}{n+1}$ $(n=0,1,2\cdots)$

(2) $f_0=t$, $f_1=\frac{2t-1}{t}$, $f_2=\frac{2\frac{2t-1}{t}-1}{\frac{2t-1}{t}}=\frac{4t-2-t}{2t-1}=\frac{3t-2}{2t-1}$, $f_3=\frac{2\frac{3t-2}{2t-1}-1}{\frac{3t-2}{2t-1}}=\frac{6t-4-2t+1}{3t-2}=\frac{4t-3}{3t-2}$

$f_n=\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$ $(n=0,1,2\cdots)$と仮定する —④

$n=0$のとき④は成り立つ —⑤

$n=k$のとき④は成り立つと仮定すると $f_{n+1}=\frac{2\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1}{\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}}=\frac{(2n+2)t-2n-nt+n-1}{(n+1)t-n}=\frac{(n+2)t-(n+1)}{(n+1)t-n}$ より

$n=k+1$のときも④は成り立つ —⑥

④⑤⑥より数学的帰納法より $f_n=\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$

$a \geqq 1$, $\frac{n}{n+1}<1$ $(n=0,1,2\cdots)$ より積分区間内ではf_nは常に定義できる

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n-1)dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1\right\}dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{(1+\frac{1}{n})t-1}{t-(1-\frac{1}{n})}-1\right\}dt$$

$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left[\frac{(1+\frac{1}{n})\{t-(1-\frac{1}{n})\}+\cancel{1}-\frac{1}{n^2}-\cancel{1}}{t-(1-\frac{1}{n})}-1\right]dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\cancel{1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\frac{1}{t-(1-\frac{1}{n})}-\cancel{1}\right\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{n}t-\frac{1}{n^2}\log\{t-(1-\tfrac{1}{n})\}\right]_a^{a+\frac{1}{n}}=\cancel{\frac{a}{n}}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\log(a+\tfrac{1}{n}-1+\tfrac{1}{n})-\cancel{\frac{a}{n}}+\frac{1}{n^2}\log(a-1+\tfrac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\log\frac{a-1+\frac{1}{n}}{a-1+\frac{2}{n}}$$

よって $a \neq 1$のとき $\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n-1)dt=\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\frac{a-1+\frac{1}{n}}{a-1+\frac{2}{n}}\right)=1$

$a=1$のとき $\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n-1)dt=\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\frac{1}{2}\right)=1-\log 2$