東工大　1998後期　①

$$x_n=\frac{1}{n^b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)^a}=\frac{1}{n^b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^a}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}=\frac{1}{n^{a+b-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}\frac{1}{n}$$

$a+b-1=0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b-1}}=1$

$a+b-1>0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b-1}}=0$

$a+b-1<0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b-1}}=\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx$$

$a=1$ のとき $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

$a\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx=\left[\frac{(1+x)^{-a+1}}{-a+1}\right]_0^1=\frac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$

以上より　$a+b\geqq 1$ のとき　x_n が収束する.

$a+b>1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$

$a+b=1$, $a=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\log 2$

$a+b=1$, $a\neq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$