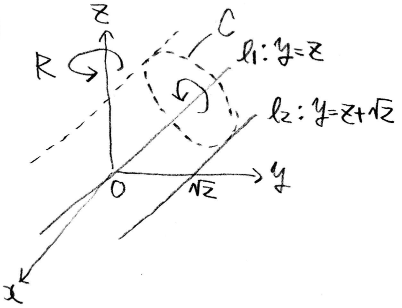
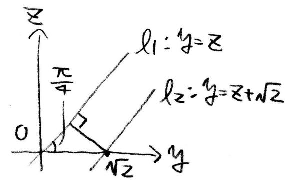
東工大 1998後期 ② (1/2)

(1)



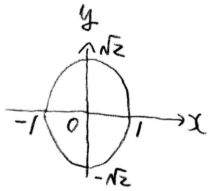
題意の楕円をDとする

Dのy座標の最大値は$\sqrt{2}$, 最小値は$-\sqrt{2}$



左図より l_1とl_2のきょりは1であるから

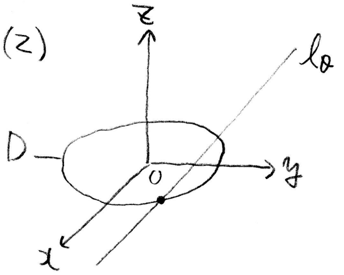
Dのx座標の最大値は1, 最小値は−1



Dは左図のようになるから

Dの方程式は $x^2+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)



C上の点は $(\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 0)$ を通り $\overrightarrow{(0,1,1)}$ に平行な直線 l_θ の集合である

l_θ 上の点は $(\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta+k, k)$ とおける

z軸と $(\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta+k, k)$ のきょりは

$\sqrt{\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sqrt{2}k\sin\theta+k^2}=\sqrt{\sin^2\theta+2\sqrt{2}k\sin\theta+k^2+1}$ であるから

l_θをz軸を軸として回転させたものと yz平面の z=k における交点は

$(0, \pm\sqrt{\sin^2\theta+2\sqrt{2}k\sin\theta+k^2+1}, k)$

$f(\theta)=\sin^2\theta+2\sqrt{2}k\sin\theta+k^2+1$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}, k\geqq 0\right)$ とする

$f'(\theta)=2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{2}k\cos\theta=2(\sin\theta+\sqrt{2}k)\cos\theta$. $\theta=-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ のとき $f'(\theta)=0$

(i) $0\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\sin\theta+\sqrt{2}k=0$ を満たすθが存在するから. これをθ_0とする

θ	$-\frac{\pi}{2}$	…	θ_0	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	0	−	0	+	0
$f(\theta)$	$(k-\sqrt{2})^2$	↘	$-k^2+1$	↗	$(k+\sqrt{2})^2$

$f(\theta)$の増減表は左表のようになる

$f(\theta)$の最大値は$(k+\sqrt{2})^2$, 最小値は$-k^2+1$

$f(-\frac{\pi}{2})=1-2\sqrt{2}k+k^2+1=(k-\sqrt{2})^2$. $f(\frac{\pi}{2})=1+2\sqrt{2}k+k^2+1=(k+\sqrt{2})^2$

$f(\theta_0)=\sin^2\theta_0+2\sqrt{2}k\sin\theta_0+k^2+1=2k^2+2\sqrt{2}k(-\sqrt{2}k)+k^2+1=-k^2+1$

(ii) $k>\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

θ	$-\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	0	+	0
$f(\theta)$	$(k-\sqrt{2})^2$	↗	$(k+\sqrt{2})^2$

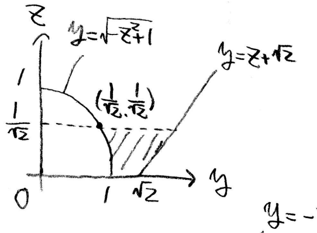
$f(\theta)$の増減表は左表のようになる

$f(\theta)$の最大値は$(k+\sqrt{2})^2$, 最小値は$(k-\sqrt{2})^2$

よって

(i) $0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$y \geqq 0$ での断面は $\sqrt{-z^2+1} \leqq y \leqq z+\sqrt{2}$

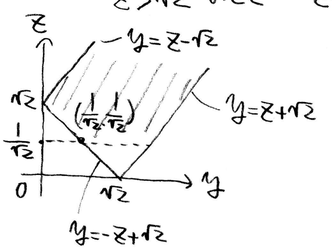


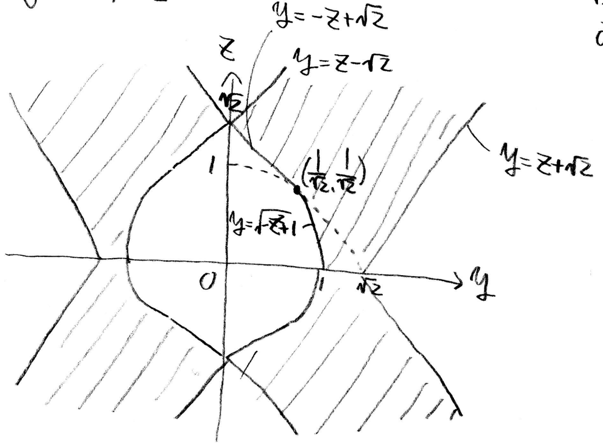
(ii) $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$y \geqq 0$ での断面は $|z-\sqrt{2}| \leqq y \leqq z+\sqrt{2}$

よって　$\frac{1}{\sqrt{2}} < z \leqq \sqrt{2}$ のとき　$-z+\sqrt{2} \leqq y \leqq z+\sqrt{2}$

$z > \sqrt{2}$ のとき　$z-\sqrt{2} \leqq y \leqq z+\sqrt{2}$

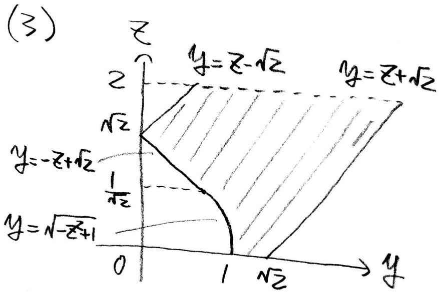




以上より、対象性より

断面は左図の斜線部である

(3)



求める体積をVとすると

Vは左図の斜線部をz軸のまわりに1回転してできる立体の体積の2倍であるから

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^2 (z+\sqrt{2})^2 dz - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-z^2+1) dz - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} (-z+\sqrt{2})^2 dz - \int_{\sqrt{2}}^{2} (z-\sqrt{2})^2 dz$$

$$= \int_0^2 (z^2+2\sqrt{2}z+2) dz - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-z^2+1) dz - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} (z^2-2\sqrt{2}z+2) dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3} + \cancel{2}\sqrt{2}\frac{z^2}{\cancel{2}} + 2z\right]_0^2 + \left[\frac{z^3}{3} - z\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[-\frac{z^3}{3} + \cancel{2}\sqrt{2}\frac{z^2}{\cancel{2}} - 2z\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2$$

$$= \cancel{\frac{8}{3}} + 4\sqrt{2} + \cancel{4} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{8}{3}} + 4\sqrt{2} - \cancel{4} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{51+1-3}{6}\sqrt{2} = \frac{49}{6}\sqrt{2}$$

$$V = \frac{49}{3}\sqrt{2}\pi$$