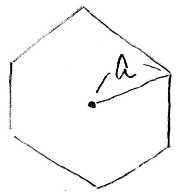
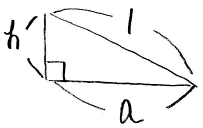
東工大　1999前期　②

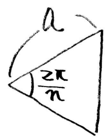
(1)



正n角形の中心と各頂点のキョリをa
正n角錐の高さをhとすると

$a^2+h^2=1$　$(0<a<1)$





正n角錐の体積をVとすると

$V=2a\sin\frac{\pi}{n}\cdot a\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{3}\cdot n=\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{6}a^2h=\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{6}(-h^3+h)$　$(0<h<1)$

$f(h)=-h^3+h$　$(0<h<1)$ とする

$f'(h)=-3h^2+1$.　$f'(h)=0$ のとき　$h=\frac{1}{\sqrt{3}}$

h	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(h)$	$+$	0	$-$
$f(h)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$

$f(h)$ の増減表は左表のようになる
$f(h)$ の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

以上より　$V_n=\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{\cancel{6}_3}\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}n\sin\frac{2\pi}{n}}{27}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}\cancel{n}}{27}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\frac{2\pi}{\cancel{n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$