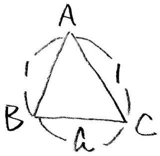
東工大　1999前期　③

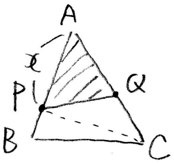


左図のような三角形を考える

$0<a<2$ —①

周上の2点をP.Qとする

(i) PがAB上．QがAC上にあるとき



$\dfrac{\triangle ACP}{\triangle ABC}=\dfrac{AP}{AB}$，$\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ACP}=\dfrac{AQ}{AC}$．$\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}$ より．$\dfrac{AP}{AB}\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{1}{2}$

$AP=x$ とすると．$AQ=\dfrac{1}{2x}$　$(0<x<1)$

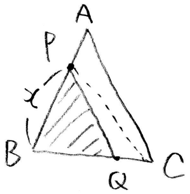
$PQ^2=x^2+\dfrac{1}{4x^2}-2x\dfrac{1}{2x}\cos A=x^2+\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{2}a^2-1$

※ $a^2=1+1-2\cos A$．$2\cos A=-a^2+2$．$\cos A=-\dfrac{1}{2}a^2+1$

相加平均≧相乗平均 より．$PQ^2\geqq 2\sqrt{x^2\dfrac{1}{4x^2}}+\dfrac{1}{2}a^2-1=\dfrac{1}{2}a^2$．等号が成立つのは．$x^2=\dfrac{1}{4x^2}$，$x^4=\dfrac{1}{4}$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき．

よって．このときの PQの長さの最小値は $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(ii) PがAB上．QがBC上にあるとき．



$\dfrac{\triangle BCP}{\triangle ABC}=\dfrac{BP}{AB}$，$\dfrac{\triangle BPQ}{\triangle BCP}=\dfrac{BQ}{BC}$　$\dfrac{\triangle BPQ}{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{BP}{AB}\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{1}{2}$

$BP=x$ とすると　$BQ=\dfrac{a}{2x}$　$(0<x<1)$

$PQ^2=x^2+\dfrac{a^2}{4x^2}-2x\dfrac{a}{2x}\cos B=x^2+\dfrac{a^2}{4x^2}-\dfrac{a^2}{2}$

※ $1=1+a^2-2a\cos B$．$2a\cos B=a^2$．$\cos B=\dfrac{a}{2}$

相加平均≧相乗平均より．$PQ^2\geqq 2\sqrt{x^2\dfrac{a^2}{4x^2}}-\dfrac{a^2}{2}=a-\dfrac{a^2}{2}=a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)$

等号が成立つのは　$x^2=\dfrac{a^2}{4x^2}$．$x^4=\dfrac{a^2}{4}$　$x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき

よって．このときの PQの長さの最小値は $\sqrt{a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)}$

$f(a)=\dfrac{a^2}{2}-a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)=a^2-a=a(a-1)$　$(0<a<2)$ とすると．

$\left.\begin{array}{l} 0<a\leqq 1 \text{ のとき } f(a)\leqq 0.\ \dfrac{a^2}{2}\leqq a\left(1-\dfrac{a}{2}\right),\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)} \\ 1<a<2 \text{ のとき } f(a)>0\ \ \dfrac{a^2}{2}>a\left(1-\dfrac{a}{2}\right),\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}>\sqrt{a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)} \end{array}\right\}②$

①.(i).(ii)② より．PQの最小値は
$0<a\leqq 1$ のとき $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$
$1<a<2$ のとき $\sqrt{a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)}$