東工大　1999前期　④

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)! \quad \text{―①}$$

$$\int_0^1 t^3e^t dt=\int_0^1 t^3(e^t)'dt=\left[t^3e^t\right]_0^1-\int_0^1 3t^2e^t dt=e-3\int_0^1 t^2(e^t)'dt=e-3\left[t^2e^t\right]_0^1+3\int_0^1 2te^t dt$$

$$=e-3e+6\int_0^1 t(e^t)'dt=-2e+6\left[te^t\right]_0^1-6\int_0^1 e^t dt=-2e+6e-6\left[e^t\right]_0^1=-2e+6 \text{ より}$$

$n=2$のとき，①の左辺$=\int_0^1 t^3e^t dt+\frac{{}_3P_2}{3}e=-2e+6+\frac{1}{3}\frac{3!}{1!}e=6$，①の右辺$=3!=6$ であるから

$n=2$のとき ①は成り立つ ―②

$n=a$のとき ①は成り立つと仮定する

$$\int_0^1 t^{2(a+1)-1}e^t dt=\int_0^1 t^{2a+1}(e^t)'dt=\left[t^{2a+1}e^t\right]_0^1-\int_0^1(2a+1)t^{2a}e^t dt=e-(2a+1)\int_0^1 t^{2a}(e^t)'dt$$

$$=e-(2a+1)\left[t^{2a}e^t\right]_0^1+(2a+1)\int_0^1 2at^{2a-1}e^t dt=e-(2a+1)e+(2a+1)2a\left\{(2a-1)!-\left(\sum_{k=1}^{a-1}\frac{\frac{(2a-1)!}{(2k-1)!}}{2k+1}\right)e\right\}$$

$$=\cancel{-2ae}+(2a+1)!-\left(\sum_{k=1}^{a-1}\frac{\frac{(2a+1)!}{(2k-1)!}}{2k+1}\right)e-\frac{\frac{(2a+1)!}{(2a-1)!}}{2a+1}e+\frac{\cancel{(2a+1)}2a}{\cancel{2a+1}}e=(2a+1)!-\left(\sum_{k=1}^{a}\frac{\frac{(2a+1)!}{(2k-1)!}}{2k+1}\right)e$$

※ ${}_{2(a+1)-1}P_{2(a+1)-2a}=\frac{(2a+1)!}{(2a-1)!}$

よって $\int_0^1 t^{2(a+1)-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{a+1-1}\frac{{}_{2(a+1)-1}P_{2(a+1)-2k}}{2k+1}\right)e=\{2(a+1)-1\}!$ であるから

$n=a+1$のとき ①は成り立つ ―③

②③より 数学的帰納より 題意は示された