東工大　2000後期　①

(1) $f(-a)=\cancel{-a^3}+a^2\cancel{-a^2}\cancel{-ab}\cancel{+a^3}\cancel{+ab}=0$ より $f(x)=(x+a)\{x^2+(-a+1)x+b\}$

$$\begin{array}{r} x^2+(-a+1)x+b \\ x+a\,\overline{)\,x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab} \\ \underline{x^3+ax^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ (-a+1)x^2+(a+b-a^2)x\qquad \\ \underline{(-a+1)x^2+(-a^2+a)x\qquad} \\ bx+ab \\ \underline{bx+ab} \\ 0 \end{array}$$

(2) $g(x)=x^2+(-a+1)x+b=x^2+(-a+1)x+\dfrac{(-a+1)^2}{4}-\dfrac{(a-1)^2-4b}{4}=\left(x+\dfrac{-a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a-1)^2-4b}{4}$ とする.

(i) $(a-1)^2-4b\leqq 0$　$b\geqq\frac{1}{4}(a-1)^2$ のとき，$g(x)\geqq 0$ である

(i-i) $a\geqq 0$ のとき

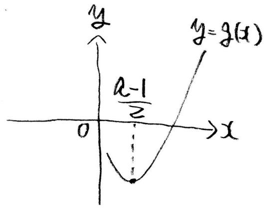
$x\geqq 0$ のとき $x+a\geqq 0$. よって すべての $x\geqq 0$ にたいし $f(x)\geqq 0$ が成り立つ

(i-ii) $a<0$ のとき

$x\geqq 0$　$x+a<0$ を満たす x が存在する

(ii) $(a-1)^2-4b>0$, $b<\frac{1}{4}(a-1)^2$ のとき. $g(x)$ は $x=\dfrac{a-1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{(a-1)^2-4b}{4}$ をとる

(ii-i) $a\geqq 1$ のとき

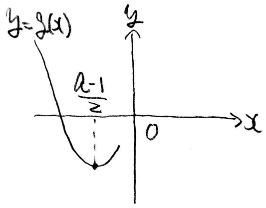


$g(x)$ のグラフは左図のようになる

$x\geqq 0$ のとき $x+a>0$

$x\geqq 0$　$f(x)<0$ を満たす x が存在する

(ii-ii) $a<1$ のとき



$g(x)$ のグラフは左図のようになる

(ii-ii-i) $0\leqq a<1$ のとき

すべての $x\geqq 0$ にたいし $f(x)\geqq 0$ が成り立つためには

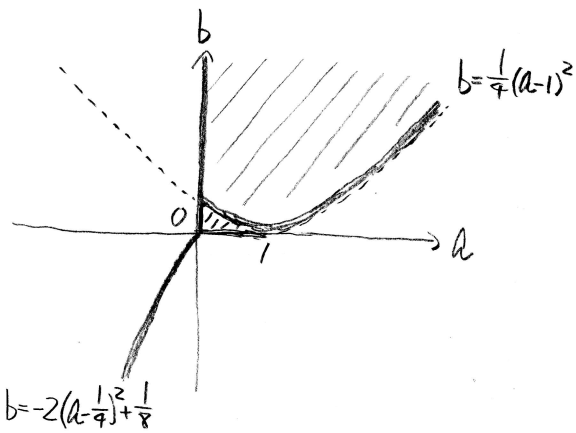
$g(0)\geqq 0$. $b\geqq 0$ であればよい

(ii-ii-ii) $a<0$ のとき

すべての $x\geqq 0$ にたいし $f(x)\geqq 0$ が成り立つためには

$g(-a)=0$.　$a^2+a^2-a+b=0$

$b=-2a^2+a=-2\left(a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}=-2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$ であればよい.



以上より (a, b) の存在範囲は

左図の斜線部および太線部である.