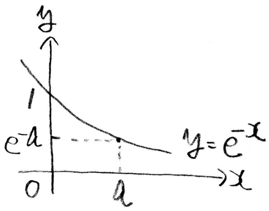
東工大　2001前期　①

(1)



(i) $\frac{1}{t} \leqq e^{-a}$, $t \geqq e^{a}$ のとき、$0 \leqq x \leqq a$ で $e^{-x}-\frac{1}{t} \geqq 0$ であるから

$S(a,t)=\int_0^a \left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx=\left[-e^{-x}-\frac{1}{t}x\right]_0^a=-e^{-a}-\frac{1}{t}a+1$

よって $S(a,t)$ は $t=e^a$ のとき 最小値 $-e^{-a}(a+1)+1$ をとる。

(ii) $e^{-a}<\frac{1}{t}<1$, $1<t<e^a$ のとき

$e^{-x}=\frac{1}{t}$ となるのは、$t=e^x$, $x=\log t$ より、$x=\log t$ のときであるから、

$0\leqq x\leqq \log t$ で $e^{-x}-\frac{1}{t} \geqq 0$, $\log t \leqq x \leqq a$ で $e^{-x}-\frac{1}{t}\leqq 0$ であるから、

$S(a,t)=\int_0^{\log t}\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx+\int_{\log t}^a\left(-e^{-x}+\frac{1}{t}\right)dx=\left[-e^{-x}-\frac{1}{t}x\right]_0^{\log t}+\left[e^{-x}+\frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a$

$=-\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\log t+1+e^{-a}+\frac{1}{t}a-\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\log t=\frac{-2\log t+a-2}{t}+e^{-a}+1$

※ $e^{-\log t}=X$ とおくと、$-\log t=\log X$, $X=\frac{1}{t}$

$\frac{dS(a,t)}{dt}=\frac{-2\frac{1}{t}t-(-2\log t+a-2)}{t^2}=\frac{2\log t-a}{t^2}$, $\frac{dS(a,t)}{dt}=0$ のとき、$\log t=\frac{a}{2}$, $t=e^{\frac{a}{2}}$

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a	$\cdots$
$\frac{dS(a,t)}{dt}$		$-$	0	$+$		
$S(a,t)$	$a+e^{-a}-1$	$\searrow$	$(e^{-\frac{a}{2}}-1)^2$	$\nearrow$	$-e^{-a}(a+1)+1$	

$S(a,t)$ の増減表は左表のようになる。

よって $S(a,t)$ は

$t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき 最小値 $(e^{-\frac{a}{2}}-1)^2$ をとる。

※ $S(a,e^{\frac{a}{2}})=\frac{-a+a-2}{e^{\frac{a}{2}}}+e^{-a}+1=(e^{-\frac{a}{2}}-1)^2$

$S(a,e^a)=\frac{-2a+a-2}{e^a}+e^{-a}+1=-e^{-a}(a+1)+1$

(iii) $\frac{1}{t}\geqq 1$, $t\leqq 1$, $0<t\leqq 1$ のとき、$0\leqq x\leqq a$ で $e^{-x}-\frac{1}{t}\leqq 0$ であるから

$S(a,t)=\int_0^a\left(-e^{-x}+\frac{1}{t}\right)dx=\left[e^{-x}+\frac{1}{t}x\right]_0^a=e^{-a}+\frac{1}{t}a-1$

よって、$S(a,t)$ は $t=1$ のとき 最小値 $a+e^{-a}-1$ をとる。

(i)(ii)(iii)より $m(a)=(e^{-\frac{a}{2}}-1)^2$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ より

$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}}-1}{a}\right)^2=\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}}-1}{-\frac{a}{2}}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$