東工大　2001前期　③　(1/2)

(1) $\boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{N}$

j回目に取り出したカードの番号を x_j とする

$X_1 = x_1$
$X_2 = x_1 + x_2$
$\vdots$
$X_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$

$\left.\right\}$ これらのどれかが k となる確率が $P_N(k)$

$i \neq j$ のとき $X_i = k$ と $X_j = k$ が同時に起こることはない ——①

(i) $P_N(1)$　$X_1 = 1$ の場合の数は $x_1 = 1$ の1通り　$X_1 = 1$ の確率は $\frac{1}{N}$

よって $P_N(1) = \frac{1}{N}$

(ii) $P_N(2)$　$X_1 = 2$ の場合の数は $x_1 = 2$ の1通り　$X_1 = 2$ の確率は $\frac{1}{N}$

$X_2 = 2$　〃　$(x_1, x_2) = (1, 1)$ の1通り　$X_2 = 2$　〃　$\frac{1}{N^2}$

これと①より $P_N(2) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}$

(iii) $P_N(3)$　$X_1 = 3$ の場合の数は $x_1 = 3$ の1通り　$X_1 = 3$ の確率は $\frac{1}{N}$

$X_2 = 3$　〃　$(x_1, x_2) = (1, 2), (2, 1)$ の2通り　$X_2 = 3$　〃　$\frac{2}{N^2}$

$X_3 = 3$　〃　$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ の1通り　$X_3 = 3$　〃　$\frac{1}{N^3}$

これと①より $P_N(3) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^3}$

(2) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$

(i) $P_3(4)$　$X_1 = 4$ の場合はない

$X_2 = 4$ の場合の数は $(x_1, x_2) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ の3通り　$X_2 = 4$ の確率は $\frac{3}{9}$

$X_3 = 4$　〃　$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ の3通り　$X_3 = 4$　〃　$\frac{3}{27}$

$X_4 = 4$　〃　$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$ の1通り　$X_4 = 4$　〃　$\frac{1}{81}$

これと①より $P_3(4) = \frac{27 + 9 + 1}{81} = \frac{37}{81}$

(ii) $P_3(5)$　$X_1 = 5$ の場合はない

$X_2 = 5$ の場合の数は $(x_1, x_2) = (2, 3), (3, 2)$ の2通り　$X_2 = 5$ の確率は $\frac{2}{9}$

$X_3 = 5$　〃　$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1)$ の6通り　$X_3 = 5$　〃　$\frac{6}{27}$

$X_4 = 5$　〃　$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)$ の4通り　$X_4 = 5$　〃　$\frac{4}{81}$

$X_5 = 5$　〃　$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$ の1通り　$X_5 = 5$　〃　$\frac{1}{243}$

これと①より $P_3(5) = \frac{54 + 54 + 12 + 1}{243} = \frac{121}{243}$

$0|0|\cdots|0$

(3) $X_j = x_1+x_2+\cdots+x_j = k$ の場合の数は

右図のように k 個の 0 と $k-1$ 個の区切りを考え、

$k-1$ 個の区切りから $j-1$ 個の区切りを選ぶ場合の数に等しく、

$\dfrac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}$ 通り.

このとき、区切りによって区切られた 0 の数が左から $x_1, x_2 \cdots x_j$ とみれる.

$X_j = k$ の確率は $\dfrac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}\dfrac{1}{N^j}$

これと①より $P_N(k)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{1}{N^j}=\sum_{j=1}^{k}{}_{k-1}C_{j-1}\frac{1}{N^j}=\sum_{j=0}^{k-1}{}_{k-1}C_j\frac{1}{N^{j+1}}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k-1}{}_{k-1}C_j\,(1)^{k-1-j}\left(\frac{1}{N}\right)^j=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$