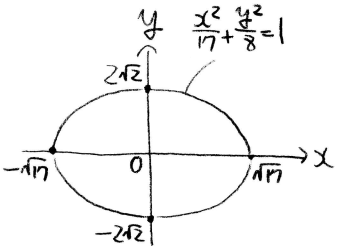
東工大 2002前期 ②



(i) $a=\pm\sqrt{17}$ かつ $b=\pm2\sqrt{2}$ のとき

Pを通り傾きがkの直線 $y-b=k(x-a)$ が楕円と接するとき

$\frac{1}{17}x^2+\frac{1}{8}\{k^2x^2+2k(-ak+b)x+a^2k^2-2abk+b^2\}=1$.

$(\frac{1}{8}k^2+\frac{1}{17})x^2+(-\frac{1}{4}ak^2+\frac{1}{4}bk)x+\frac{1}{8}a^2k^2-\frac{1}{4}abk+\frac{1}{8}b^2-1=0$ が重解を持てばよく.

kが $\cancel{\frac{1}{16}a^2k^4}-\cancel{\frac{1}{8}abk^3}+\cancel{\frac{1}{16}b^2k^2}=(\frac{1}{8}k^2+\frac{1}{17})(\frac{1}{2}a^2k^2-abk+\frac{1}{2}b^2-4)$

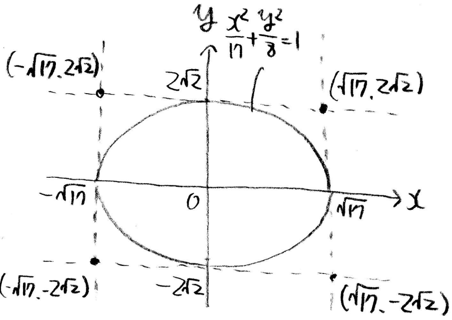
$=\cancel{\frac{1}{16}a^2k^4}-\cancel{\frac{1}{8}abk^3}+\cancel{\frac{1}{16}b^2k^2}-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{34}a^2k^2-\frac{1}{17}abk+\frac{1}{34}b^2-\frac{4}{17}$

$-17k^2+a^2k^2-2abk+b^2-8=0$, $(a^2-17)k^2-2abk+b^2-8=0$ —① を満たせばよい.

①は $a^2b^2>(a^2-17)(b^2-8)$, $a^2b^2>a^2b^2-8a^2-17b^2+8\cdot17$, $\frac{a^2}{17}+\frac{b^2}{8}>1$ のとき.

異なる2つの実数解を持ち. これを α. β とすると. $\alpha\beta=\frac{b^2-8}{a^2-17}$

$\alpha\beta=-1$ であればよいから. $\frac{b^2-8}{a^2-17}=-1$, $b^2-8=-a^2+17$. $a^2+b^2=25$



(ii) $a=\pm\sqrt{17}$ または $b=\pm2\sqrt{2}$ のとき

題意を満たす点は左図の4点のみである.

(i)(ii)より. 点Pの軌跡は. $x^2+y^2=25$