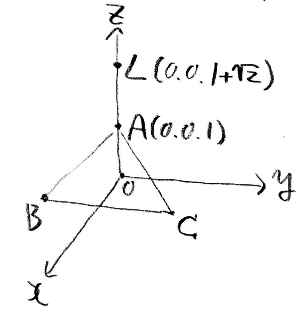
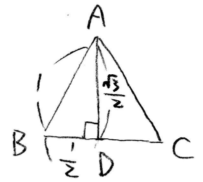
東工大　2002前期　③



正三角形をz軸の回りに回転させたときの対称性より
Bのx座標とCのx座標が等しく、Bのy座標<Cのy座標 であるもののみを考える。

BCの中点をDとすると $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$



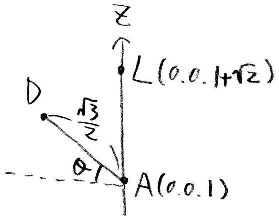
左下図のようにθ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$をとると

Dの座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ 0,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

B, Cの座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \mp\frac{1}{2},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

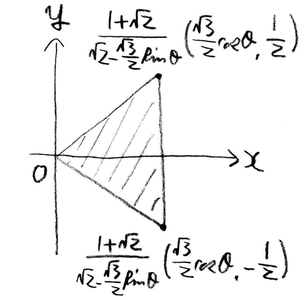
LとB, Cを通る直線は $(0, 0, 1+\sqrt{2})+k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \mp\frac{1}{2},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-1-\sqrt{2}\right)$

$1+\sqrt{2}+k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\sqrt{2}\right)=0$ のとき $k=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}$ より



これらとxy平面の交点の座標は $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \mp\frac{1}{2},\ 0\right)$

よって影の部分は左図の斜線部であるから、これの面積を$S(\theta)$とすると



$$S(\theta)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}\frac{1}{2}=\frac{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\frac{\cos\theta}{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2}$$

$$S'(\theta)=\frac{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\frac{-\sin\theta\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2+\cos\theta\cdot\cancel{2}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cos\theta}{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^4}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\frac{-\sqrt{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta+\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)}{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^3}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^3}$$

$S'(\theta)=0$ のとき $\sqrt{3}\sin^2\theta+2\sqrt{2}\sin\theta-2\sqrt{3}=0$

$\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2+6}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{2}\pm2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{6}}{3}$，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ より $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

θ	…	φ	…
$S'(\theta)$	+	0	−
$S(\theta)$	↗	$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$	↘

φを $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす値とすると
$S(\theta)$の増減表は左表のようになる。

※ $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$ より $\frac{2}{3}+\cos^2\varphi=1$，$\cos^2\varphi=\frac{1}{3}$.
$\cos\varphi\geqq0$ より $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$S(\varphi)=\frac{(1+\sqrt{2})^2\cancel{\sqrt{3}}}{4}\frac{\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}}{\left(\sqrt{2}-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{3+2\sqrt{2}}{\cancel{2}-\cancel{2}+\frac{1}{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

よって求める値は $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$