東工大　2003前期　①

(1) 原点を通る直線を $y=kx$ とする.

$-x^3+ax^2+bx=kx$, $(x^2-ax-b+k)x=0$

(i) $x^2-ax-b+k=0$ が 0以外の重解を持つとき.

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-b+k=0$ より. $k=\frac{a^2}{4}+b$ のとき. 重解 $\frac{a}{2}$ を持つ.

(ii) $x^2-ax-b+k=0$ が 0と0以外のもう1つの解を持つとき.

$k=b$ のとき. 解 0, a を持つ.

(i).(ii)より. $y=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)x$, $y=bx$

(2) $S_1=\left|\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-x^3+ax^2+\cancel{bx}-\frac{a^2}{4}x-\cancel{bx}\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+a\frac{x^3}{3}-\frac{a^2}{4}\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}}\right|=\left|-\frac{a^4}{64}+\frac{a^4}{24}-\frac{a^4}{32}\right|$

$=\frac{a^4}{8}\left|-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right|=\frac{a^4}{8}\left|\frac{-3+8-6}{24}\right|=\frac{a^4}{192}$

24
×8
192

$S_2=\left|\int_0^{a}\left(-x^3+ax^2+\cancel{bx}-\cancel{bx}\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+a\frac{x^3}{3}\right]_0^{a}\right|=\left|-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{3}\right|=a^4\left|\frac{-3+4}{12}\right|=\frac{a^4}{12}$

12)192 = 16
12
72
72
0

よって. $S_1:S_2=\frac{a^4}{192}:\frac{a^4}{12}=1:16$