東工大　2004前期　①

(1) $f'(x)=\frac{4x^3(x-a)^{\cancel{3}}-x^4\cdot 3\cancel{(x-a)^2}}{(x-a)^{\cancel{6}4}}=\frac{x^3(4x-4a-3x)}{(x-a)^4}=\frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$, $f'(x)=0$ のとき, $x=4a$

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{256}{27}a$	$\nearrow$	∞

$f(x)$の増減表は左表のようになる.

$f(4a)=\frac{256a^4}{27a^3}=\frac{256}{27}a$

(2) $g'(x)=\frac{-2(x-a)}{(x-a)^4}-\frac{-b\,3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}4}}=-2\frac{1}{(x-a)^3}+3b\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^4}\left\{-2\frac{x^4}{(x-a)^3}+3b\right\}=-\frac{2}{x^4}\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3}{2}b\right\}$

(i) $\frac{3}{2}b>\frac{256}{27}a$ のとき.

(1)より. $g'(x)=0$を満たすxが2つ存在する. これを α, β $(\alpha<\beta)$ とする.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$g(x)$の増減表は左表のようになる.
よって, 題意を満たす直線は存在する.

(ii) $\frac{3}{2}b\leqq\frac{256}{27}a$ のとき.

(1)より. $g'(x)\leqq 0$, $g(x)$は単調減少. よって題意を満たす直線は存在しない.

(i), (ii)より. 求める条件は. $\frac{3}{2}b>\frac{256}{27}a$