東工大　2004前期　②

(1) $\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi} f\{\sin(X+k\pi)\}g\{\cos(X+k\pi)\}\,dX$

$X=x-k\pi$ とおく. $\begin{array}{c|c} x & k\pi\to(k+1)\pi \\ \hline X & 0\to\pi \end{array}$, $\dfrac{dX}{dx}=1$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi} f(\sin x\cdot\cos k\pi)g(\cos x\cdot\cos k\pi)\,dx}_{①} = \sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$$

※ kが奇数のとき ①$=\int_0^\pi f(-\sin x)g(-\cos x)\,dx$ であるが, $f(x)$, $g(x)$は偶関数であるから ①$=\int_0^\pi f(\sin x)g(\cos x)\,dx$

kが偶数のとき ①$=\int_0^\pi f(\sin x)g(\cos x)\,dx$

(2) $$\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx = \int_0^n \frac{|\sin X|}{(1+\cos^2 X)^2}\frac{1}{n}\,dX = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \quad —②$$

$nx=X$ とおく. $\begin{array}{c|c} x & 0\to1 \\ \hline X & 0\to n \end{array}$. $\dfrac{dX}{dx}=n$

$m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ より ②より $$\underbrace{\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx}_{④} \leqq \int_0^{n}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx < \underbrace{\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx}_{⑤} \quad —③$$

(1)より. ④$\displaystyle = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$ —④', ⑤$\displaystyle =(m+1)\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$ —⑤'

$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx = V$ とおくと. ②③④'⑤'より. $$\frac{m}{n}V \leqq \int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx < \frac{m+1}{n}V \quad —⑥$$

ここで $n<(m+1)\pi$ より. $\dfrac{m}{n}>\dfrac{m}{(m+1)\pi}$, $m\pi\leqq n$ より. $\dfrac{m+1}{n}\leqq\dfrac{m+1}{m\pi}$ であるから

⑥より. $\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}V < \int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx < \frac{m+1}{m\pi}V$, $\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}V \leqq \int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}V$

(3) $n<(m+1)\pi$ より. $m>\dfrac{n}{\pi}-1$ であるから. $n\to\infty$ のとき. $m\to\infty$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{(m+1)\pi}V = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{m})\pi}V = \frac{V}{\pi}, \quad \lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{m\pi}V = \lim_{m\to\infty}\frac{1+\frac{1}{m}}{\pi}V = \frac{V}{\pi},$$

$$V=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx = -\int_1^{-1}\frac{1}{(1+X^2)^2}\,dX = 2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}\,dX = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$\cos x=X$ とおく. $\begin{array}{c|c} x & 0\to\pi \\ \hline X & 1\to-1 \end{array}$. $\dfrac{dX}{dx}=-\sin x$

$X=\tan\theta$ とおく. $\begin{array}{c|c} X & 0\to1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{4} \end{array}$. $\dfrac{dX}{d\theta}=\dfrac{\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta = \cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{\cancel{2}}\,d\theta = \left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$ より.

(2)より. はさみうちの原理より $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$