東工大　2004年前期　③

(1) Pが表 p < Qが表 q → 赤　　Pが表, Qが表で赤の確率 pq
　　　　　　 Qが裏 $1-q$ → 白　　Pが表, Qが裏で白 〃 $p(1-q)$
　　Pが裏 $1-p$ < Rが表 r → 赤　　Pが裏, Rが表で赤 〃 $(1-p)r$
　　　　　　 Rが裏 $1-r$ → 白　　Pが裏, Rが裏で白 〃 $(1-p)(1-r)$

k回, Pが表, Qが表, $n-k$回, Pが表, Qが裏が起これはよい.

これの場合の数は, n回からk回を選ぶ場合の数に等しく, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 通りであるから

求める確率は $\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^kp^{n-k}(1-q)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^nq^k(1-q)^{n-k}$

(2) 赤をいれる確率は $pq+(1-p)r$

赤をn回いれればよく, これの場合の数は1通りであるから, 求める確率は $\{pq+(1-p)r\}^n$

(3) 白をいれる確率は $p(1-q)+(1-p)(1-r)$

赤がk個入っている確率を $f(k)$ $(k=0,1\cdots n)$ とする.

赤がk個入っているには, 赤をk回, 白を$n-k$回いれればよく,

これの場合の数は, n回からk回を選ぶ場合の数に等しく, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 通りであるから.

$$f(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\{pq+(1-p)r\}^k\{p(1-q)+(1-p)(1-r)\}^{n-k}$$

$$=\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{4}{5}\right)^{2004-k}=\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{5+2}{20}\right)^k\left(\frac{5+8}{20}\right)^{2004-k}$$

$$=\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}$$

$g(k)=\frac{f(k+1)}{f(k)}$ $(k=0,1\cdots n-1)$ とする.

$$g(k)=\frac{\frac{2004!}{(k+1)!(2003-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\frac{13}{20}\right)^{2003-k}}{\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}}=\frac{2004-k}{k+1}\frac{7}{\cancel{20}}\frac{\cancel{20}}{13}=\frac{7}{13}\frac{2004-k}{k+1}$$

$$g'(k)=\frac{7}{13}\frac{-(k+1)-(2004-k)}{(k+1)^2}=\frac{7}{13}\frac{-2005}{(k+1)^2}<0$$ より, $g(k)$は単調減少

$g(k)=1$のとき, $14028-7k=13k+13$, $20k=14015$, $k=700.75$ であるから.

$k\leqq 700$ のとき $g(k)=\frac{f(k+1)}{f(k)}>1$, $f(k+1)>f(k)$

$k\geqq 701$ のとき $g(k)=\frac{f(k+1)}{f(k)}<1$, $f(k+1)<f(k)$

よって 701個.

$2004\times 7=14028$

$14015\div 20=700.75$