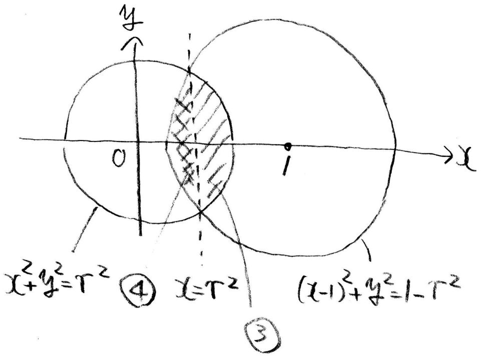
東工大　2004前期　④

(1) $V(r)$ は $x^2+y^2=r^2$ —① と、$(x-1)^2+y^2=1-r^2$ —② の共通部分を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積に等しい。

①、②の交点の x 座標は、$\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+r^2=\cancel{1}-r^2$，$x=r^2$ より r^2



③、④の部分を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を V_1, V_2 とすると、

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_{r^2}^{r}(-x^2+r^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+r^2x\right]_{r^2}^{r}$$

$$=-\frac{r^3}{3}+r^3+\frac{r^6}{3}-r^4=\frac{1}{3}r^6-r^4+\frac{2}{3}r^3$$

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}}(-x^2+1-r^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+(1-r^2)x\right]_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(1-3r^2+3r^4-r^6)-(1-2r^2+r^4)$$

$$=\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}-r^2+\cancel{r^4}-\frac{1}{3}r^6-1+2r^2-\cancel{r^4}$$

$$=-\frac{1}{3}r^6+r^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$V(r)=V_1+V_2=\left\{-r^4+\frac{2}{3}r^3+r^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}\pi$$

(2) $V'(r)=\left\{-4r^3+2r^2+2r+\sqrt{1-r^2}(-2r)\right\}\pi=\left(-2r^2+r+1-\sqrt{1-r^2}\right)2\pi r$

$V'(r)=0$ のとき、$-2r^2+r+1=\sqrt{1-r^2}$，$4r^4+r^2+\cancel{1}-4r^3-4r^2+2r=\cancel{1}-r^2$

$4r^4-4r^3-2r^2+2r=0$　$(2r^3-2r^2-r+1)r=0$，

$(2r^2-1)(r-1)r=0$，$0<r<1$ より $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r|l} & 2r^2\quad -1 \\ \hline r-1 & 2r^3-2r^2-r+1 \\ & 2r^3-2r^2 \\ \hline & \qquad\quad -r+1 \\ & \qquad\quad -r+1 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

r	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	$\left(-\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$	$\searrow$

$V(r)$ の増減表は左表のようになる。

よって $V(r)$ は $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\left(-\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$ をとる。

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi=\left(\frac{-3+6-8}{12}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\pi=\left(-\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$