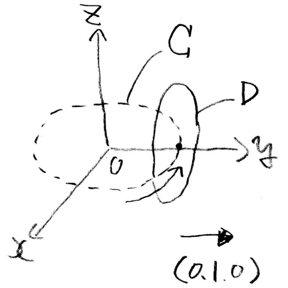
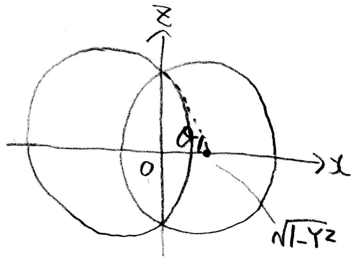
東工大　2005前期　③





※ $x^2+y^2=1$ と $y=Y$ の交点の x座標は
$x^2+Y^2=1$, $x^2=1-Y^2$, $x=\pm\sqrt{1-Y^2}$ より
$\pm\sqrt{1-Y^2}$

Dが通過する部分を
平面 $y=Y$ $(0\leqq Y\leqq 1)$ で切った切り口は
左図のようになる。

これの面積を S とする。

$$S=2\pi-2\left(\pi\cdot\frac{2\theta}{2\pi}-2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\sin\theta\cos\theta-2\theta+2\pi$$

また $\cos\theta=\sqrt{1-Y^2}$ より、
$\cos^2\theta=1-Y^2$, $Y^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$, $Y=\sin\theta$

求める体積を V とすると

$$V=2\int_0^1 S\,dY=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta-2\theta+2\pi)\cos\theta\,d\theta$$

$Y=\sin\theta$ とおく。 $\begin{array}{c|c} Y & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$　$\frac{dY}{d\theta}=\cos\theta$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

※ $(\cos^3\theta)'=-3\cos^2\theta\cdot\sin\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\sin\theta)'\,d\theta=\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+(-1)=\frac{\pi}{2}-1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$　より

$$V=4\frac{1}{3}-4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+4\pi=2\pi+\frac{16}{3}$$