東工大　2006前期 ①

(1) $I(n)=\int_0^{n\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = n\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = n\{-(-1)\}=n$

(2) $\int_0^{s\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{s\frac{\pi}{2}} = \sin s\frac{\pi}{2}$ より、$0\leqq \sin\frac{\pi}{2}s - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0\leqq s\leqq 1)$ —① を示せばよい。

(i) $f(s)=\sin\frac{\pi}{2}s - s \quad (0\leqq s\leqq 1)$ とする。

$f'(s)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}s-1$．$f'(s)=0$ のとき $\cos\frac{\pi}{2}s=\frac{2}{\pi}$，$0\leqq s\leqq 1$ でこれを満たす s がただ1つ存在するから、これを s_0 とする。

s	0	$\cdots$	s_0	$\cdots$	1
$f'(s)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(s)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$f(s)$ の増減表は左表のようになる

よって $f(s)\geqq 0$.

(ii) $g(s)=\frac{\pi}{2}s-\sin\frac{\pi}{2}s \quad (0\leqq s\leqq 1)$ とする。

$g'(s)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}s$，$g'(s)=0$ のとき $\cos\frac{\pi}{2}s=1$，$s=0$

s	0	$\cdots$	1
$g'(s)$	0	$+$	$+$
$g(s)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$

$g(s)$ の増減表は左表のようになる

よって $g(s)\geqq 0$

(i),(ii)より、①は示された。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt = \int_0^{a\frac{\pi}{2}}|\sin A|\frac{1}{a}dA = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{[a]\frac{\pi}{2}}|\sin A|dA}_{(1)\text{より、これは}[a]} + \frac{1}{a}\int_{[a]\frac{\pi}{2}}^{a\frac{\pi}{2}}|\sin A|dA$

$at=A$ とおく $\begin{array}{c|c} t & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline A & 0\to a\frac{\pi}{2}\end{array}$，$\frac{dA}{dt}=a$

$=\frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_0^{(a-[a])\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

よって $0\leqq \frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_0^{(a-[a])\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$

$0\leqq\int_0^{(a-[a])\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-(a-[a])\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[a])$ —② を示せばよい。

$0\leqq a-[a]\leqq 1$ であるから (2)より、②は示された。