東工大　2006前期 ②

(1) $g'(t)=\frac{1}{b}at^{a-1}-\frac{1}{t}$, $g'(t)=0$ のとき $\frac{a}{b}t^{a-1}=\frac{1}{t}$, $t^a=\frac{b}{a}$, $t=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$

t	$\cdots$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	$\frac{1}{a}\left(1-\log\frac{b}{a}\right)$	↗

$g(t)$の増減表は左表のようになる.

$g\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right\}=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\log\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\left(1-\log\frac{b}{a}\right)$

(2) $\frac{1}{y}t^x-\log t$ の最小値は (1)より $\frac{1}{x}\left(1-\log\frac{y}{x}\right)$ であるから

(b)が成り立つためには $\frac{1}{x}\left(1-\log\frac{y}{x}\right)\geqq m$, $1-\log\frac{y}{x}\geqq mx$, $\log\frac{y}{x}\leqq -mx+1$

$\frac{y}{x}\leqq e^{-mx+1}$, $y\leqq xe^{-mx+1}$ であればよい.

$f(x)=xe^{-mx+1}$ $(x>0)$ とする.

$f'(x)=e^{-mx+1}+x(-m)e^{-mx+1}=(-mx+1)e^{-mx+1}$, $f'(x)=0$ のとき $x=\frac{1}{m}$

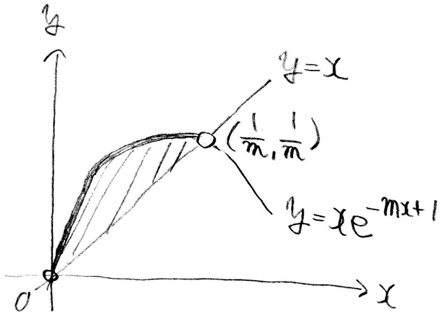
x	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{m}$	↘

$f(x)$の増減表は左表のようになる

$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}$

$x=xe^{-mx+1}$ のとき $\begin{cases} x=0 \\ e^{-mx+1}=1,\ x=\frac{1}{m}\end{cases}$

以上より D は右図の斜線部である.



※ 太線部の境界線上の点 含む
　 細線部の　〃　含まない.

(3) 求める面積を S とすると

$S=\int_0^{\frac{1}{m}}(xe^{-mx+1}-x)dx=\int_0^{\frac{1}{m}}x\left(\frac{e^{-mx+1}}{-m}\right)'dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{m}}$

$=-\frac{1}{m}\left[xe^{-mx+1}\right]_0^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{m}}e^{-mx+1}dx-\frac{1}{2m^2}=-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\left[\frac{e^{-mx+1}}{-m}\right]_0^{\frac{1}{m}}-\frac{1}{2m^2}$

$=-\frac{3}{2m^2}-\frac{1}{m^2}(1-e)=\frac{2e-5}{2m^2}$