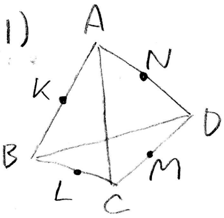
東工大　2006前期　④

(1)



適当な位置に点Oをとる.

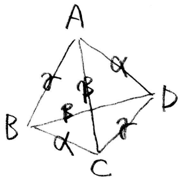
$4\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}=4(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OL})=4(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

$=4(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB})$

$=4(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD})=4(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})\cdot(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})$

$=4(\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|^2)=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2$

(2) (i) △ABCのすべての辺の長さが異なるとき



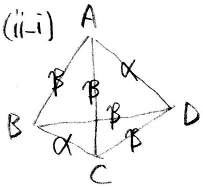
BC=α, CA=β, AB=γ とする.

BD=α, または CD=α とすると △BCDが二等辺三角形になるので AD=α

さらに BD=β, CD=γ

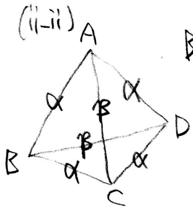
(ii) △ABCが二等辺三角形のとき

(ii-i)



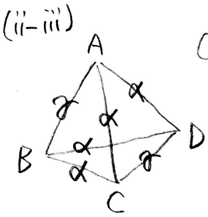
AB=AC=β, BC=αのとき 残りの辺の長さは左図のようになる.

(ii-ii)



BA=BC=α, AC=βのとき 残りの辺の長さは左図のようになる

(ii-iii)

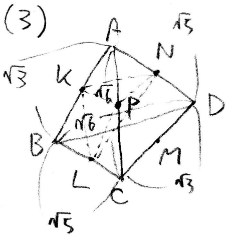


CA=CB=α, AB=γのとき 残りの辺の長さは左図のようになる.

(iii) △ABCが正三角形のとき, 明らかに $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$.

(i),(ii),(iii)より題意は示された.

(3)



(1)より $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ より

$\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OD}$

(1)より $\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ より

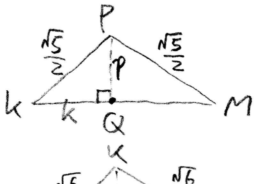
$\overrightarrow{OL}+\frac{1}{2}\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OD}$

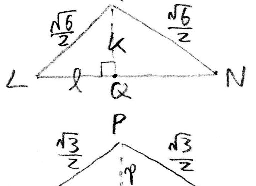
よって M, K の中点と L, N の中点は一致する. これをQとする.

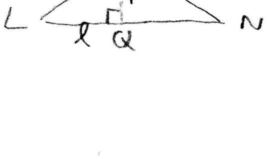
K, L, M, N, Q は同一平面上にある.

(2)より $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ より (1)より $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}=0$. $\overrightarrow{MK}$ と $\overrightarrow{LN}$ は直交する

(2)より $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{6}$







KM=$2k$, LN=$2l$, PQ=p とすると左図のようになる.

よって $\begin{cases} k^2+p^2=\frac{5}{4} \\ k^2+l^2=\frac{3}{2} \\ l^2+p^2=\frac{3}{4} \end{cases}$

$\frac{3}{2}-k^2+\frac{5}{4}-k^2=\frac{3}{4}$　$2k^2=2$　$k=1$

$1+l^2=\frac{3}{2}$　$l=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2}+p^2=\frac{3}{4}$　$p=\frac{1}{2}$

四面体PKLNは底面が△KLN, 高さがPQの三角錐とみれるから

これの体積は $\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$