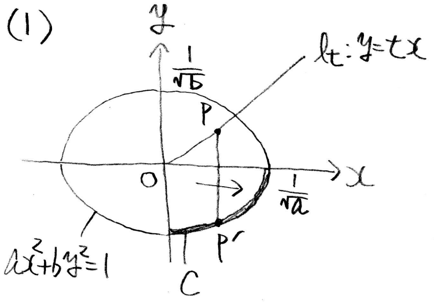
東工大　2006後期　①

(1)



P, P'の座標を (x, tx), $\left(x, -\sqrt{\frac{1-ax^2}{b}}\right)$ とすると、

PP'の長さは $tx+\sqrt{\frac{1-ax^2}{b}}$

$f(x)=tx+\sqrt{\frac{1-ax^2}{b}}$ $\left(0\leqq x\leqq \frac{1}{\sqrt a}\right)$ とする。 $f'(x)=t+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\frac{a}{b}\cancel{2}x}{\sqrt{\frac{1-ax^2}{b}}}$

$f'(x)=0$のとき $t=\frac{\frac{a}{b}x}{\sqrt{\frac{1-ax^2}{b}}}$, $\frac{1-ax^2}{b}=\frac{a^2}{b^2t^2}x^2$, $a\left(1+\frac{a}{bt^2}\right)x^2=1$, $x=\frac{1}{\sqrt{a\left(1+\frac{a}{bt^2}\right)}}$

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{a(1+\frac{a}{bt^2})}}$	…	$\frac{1}{\sqrt a}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	最大	↘	

$f(x)$の増減表は左図のようになる

$f(x)$は $x=\frac{1}{\sqrt{a\left(1+\frac{a}{bt^2}\right)}}$ のとき最大値をとる.

よってP_tの座標を(x, y)とすると $x=\frac{1}{\sqrt{a\left(1+\frac{a}{bt^2}\right)}}$ —①, $y=\frac{t}{\sqrt{a\left(1+\frac{a}{bt^2}\right)}}$ —②

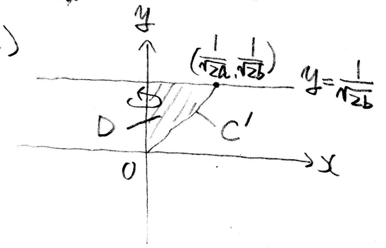
①②より $ax^2+\frac{a^2}{bt^2}x^2=1$, $abt^2x^2+a^2x^2=bt^2$　$b(1-ax^2)t^2=a^2x^2$, $t=\frac{ax}{\sqrt{b(1-ax^2)}}$, $y=\frac{ax^2}{\sqrt{b(1-ax^2)}}$

ゆえに C'の方程式は $y=\frac{ax^2}{\sqrt{b(1-ax^2)}}$

(2) $ax^2+\cancel{b}\frac{a^2x^4}{\cancel{b}(1-ax^2)}=1$, $ax^2-\cancel{a^2x^4}+\cancel{a^2x^4}=1-ax^2$, $x\geqq 0$より $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$

$a\frac{1}{2a}+by^2=1$, $y\geqq 0$より $y=\frac{1}{\sqrt{2b}}$,　より $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2a}}$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{2b}}$

(3)



C'と直線 $y=Y$ $\left(0\leqq Y\leqq \frac{1}{\sqrt{2b}}\right)$ の交点のx座標は

$bY^2-abY^2x^2=a^2x^4$, $a^2x^4+abY^2x^2-bY^2=0$

$x^2=\frac{-abY^2\pm\sqrt{a^2b^2Y^4+4a^2bY^2}}{2a^2}=\frac{-abY^2\pm abY^2\sqrt{1+\frac{4}{bY^2}}}{2a^2}$

$x^2\geqq 0$より $x^2=\frac{-bY^2+bY^2\sqrt{1+\frac{4}{bY^2}}}{2a}$, $x\geqq 0$より $x=\sqrt{\frac{-bY^2+bY^2\sqrt{1+\frac{4}{bY^2}}}{2a}}$

より $\sqrt{\frac{-bY^2+bY^2\sqrt{1+\frac{4}{bY^2}}}{2a}}$ であるから、C'と直線 $y=Y$はただ1点で交わる.

$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}\pi\frac{-by^2+by^2\sqrt{1+\frac{4}{by^2}}}{2a}dy$

$\frac{2aV}{b\pi}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}\left(-y^2+y\sqrt{y^2+\frac{4}{b}}\right)dy=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{1}{3}\left(y^2+\frac{4}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}=-\frac{1}{3}\frac{1}{2b}\frac{1}{\sqrt{2b}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2b}+\frac{4}{b}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$

↓

$\frac{d}{dy}\left(y^2+\frac{4}{b}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{y^2+\frac{4}{b}}\cdot\cancel{2}y$ より $\frac{d}{dy}\frac{1}{3}\left(y^2+\frac{4}{b}\right)^{\frac{3}{2}}=y\sqrt{y^2+\frac{4}{b}}$

$=-\frac{1}{6\sqrt2}\frac{1}{b\sqrt b}+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2b}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}8\frac{1}{b\sqrt b}=-\frac{\sqrt2}{12}\frac{1}{b\sqrt b}+\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{2\sqrt2}\frac{1}{b\sqrt b}-\frac{8}{3}\frac{1}{b\sqrt b}=\left(-\frac{\sqrt2}{12}+\frac{9\sqrt2}{4}-\frac{8}{3}\right)\frac{1}{b\sqrt b}=\frac{-\sqrt2+27\sqrt2-32}{12}\frac{1}{b\sqrt b}$

$=\frac{13\sqrt2-16}{6}\frac{1}{\cancel{b}\sqrt b}$,　$V=\frac{13\sqrt2-16}{12a\sqrt b}\pi$