東工大　2007後期　①

(1) n_1, n_2, n_3 を α, β, γ と書く.

$f(x)=x^3-\alpha x+(-1)^\beta\cdot\gamma$ とする.　$f'(x)=3x^2-\alpha$.　$f'(x)=0$ のとき $x=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x)$ の増減表は左表

$f\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right)<0$ であればよい

$\left\{-\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}+\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{3}}+(-1)^\beta\cdot\gamma\right\}\left\{\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}-\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{3}}+(-1)^\beta\cdot\gamma\right\}<0$.　$\left\{\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}+(-1)^\beta\cdot\gamma\right\}\left\{-\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}+(-1)^\beta\cdot\gamma\right\}<0$

$-\frac{4\alpha^2}{9}\frac{\alpha}{3}+\gamma^2<0$.　$\gamma^2<\frac{4}{27}\alpha^3$ であればよい.

α	1	2	3	4	5	6
$\frac{4}{27}\alpha^3$	$\frac{4}{27}$	$\frac{32}{27}$	4	$\frac{256}{27}$	$\frac{500}{27}$	32

これが成り立つのは

$(\alpha,\gamma)=(2,1),(3,1),(4,1)(4,2)(4,3)$
$(5,1),(5,2)(5,3)(5,4)$
$(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)$

よって $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

(2) $x\geqq 3$ のとき $x(x^2-\alpha)+(-1)^\beta\cdot\gamma>0$ より.

$x^3-\alpha x+(-1)^\beta\cdot\gamma=0$ —① のとり得る自然数の解は 1, 2

(i) ①が1を解に持つとき.　$1-\alpha+(-1)^\beta\cdot\gamma=0$.　$(-1)^\beta\cdot\gamma=\alpha-1$

これが成り立つのは. $\beta=2,4,6$ として $(\alpha,\gamma)=(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)(6,5)$ のとき.

これは $3\times5=15$ 通り

(ii) ①が2を解に持つとき.　$8-2\alpha+(-1)^\beta\cdot\gamma=0$.　$(-1)^\beta\cdot\gamma=2\alpha-8$

これが成り立つのは. $\beta=1,3,5$ として $(\alpha,\gamma)=(1,6),(2,4),(3,2)$ のとき.

これは $3\times3=9$ 通り

$\beta=2,4,6$ として $(\alpha,\gamma)=(5,2)(6,4)$ のとき.

これは $3\times2=6$ 通り

(i)(ii)より $\frac{15+9+6}{216}=\frac{30}{216}=\frac{5}{36}$

$36\times6=216$