



(i) $a \neq b$ のとき

$$ax-7 \leq f(ax-7) < ax-6, \quad bx+3 \leq f(bx+3) < bx+4 \quad \text{f'}$$

$$\frac{1}{ax-6} - \frac{1}{bx+3} < \frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} < \frac{1}{ax-7} - \frac{1}{bx+4} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{1}{ax-6} - \frac{1}{bx+3} = \frac{bx+3-ax+6}{(ax-6)(bx+3)} = \frac{1}{x} \frac{-a+b+\frac{9}{x}}{(a-\frac{6}{x})(b+\frac{3}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^C \left(\frac{1}{ax-6} - \frac{1}{bx+3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{C-1} \frac{-a+b+\frac{9}{x}}{(a-\frac{6}{x})(b+\frac{3}{x})}, \quad \text{これは} \begin{cases} C > 1 \text{ のとき } \infty \\ C = 1 \text{ のとき } \frac{-a+b}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ C < 1 \text{ のとき } 0 \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{1}{ax-7} - \frac{1}{bx+4} = \frac{bx+4-ax+7}{(ax-7)(bx+4)} = \frac{1}{x} \frac{-a+b+\frac{11}{x}}{(a-\frac{7}{x})(b+\frac{4}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^C \left(\frac{1}{ax-7} - \frac{1}{bx+4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{C-1} \frac{-a+b+\frac{11}{x}}{(a-\frac{7}{x})(b+\frac{4}{x})}, \quad \text{これは} \begin{cases} C > 1 \text{ のとき } \infty \\ C = 1 \text{ のとき } \frac{-a+b}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ C < 1 \text{ のとき } 0 \end{cases} \quad \text{--- (3)}$$

①②③より、はみうちの原理より、実数 C の最大値は 1 、 ε ときの極限值は $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

(ii) $a = b$ のとき

$$f(bx+3) = f(ax+3) = f(ax-7) + 10$$

$$\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} = \frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(ax-7)+10} = \frac{f(ax-7)+10-f(ax-7)}{f(ax-7)\{f(ax-7)+10\}}$$

$$ax-7 \leq f(ax-7) < ax-6 \quad \text{f'}$$

$$\frac{10}{(ax-6)(ax+4)} < \frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \leq \frac{10}{(ax-7)(ax+3)} \quad \text{--- (4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^C}{(ax-6)(ax+4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^{C-2}}{(a-\frac{6}{x})(a+\frac{4}{x})}, \quad \text{これは} \begin{cases} C > 2 \text{ のとき } \infty \\ C = 2 \text{ のとき } \frac{10}{a^2} \\ C < 2 \text{ のとき } 0 \end{cases} \quad \text{--- (5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^C}{(ax-7)(ax+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^{C-2}}{(a-\frac{7}{x})(a+\frac{3}{x})}, \quad \text{これは} \begin{cases} C > 2 \text{ のとき } \infty \\ C = 2 \text{ のとき } \frac{10}{a^2} \\ C < 2 \text{ のとき } 0 \end{cases} \quad \text{--- (6)}$$

④⑤⑥より、はみうちの原理より、実数 C の最大値は 2 、 ε ときの極限值は $\frac{10}{a^2}$