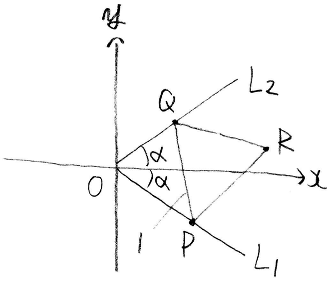
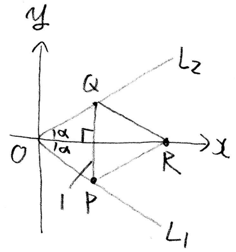
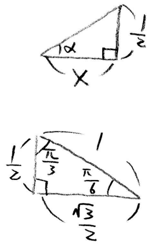
東工大 2008前期 ④

(1)







左図のように $x$ をとると $\tan\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$ $x = \dfrac{1}{2\tan\alpha}$

左図より. 点Rの座標は

$\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

(2) $OP=p$, $OQ=q$ とすると. 余弦定理より $1 = p^2+q^2-2pq\cos 2\alpha$ —①

P. Qの座標は $(p\cos\alpha, -p\sin\alpha)$. $(q\cos\alpha, q\sin\alpha)$ とおける.

$\overrightarrow{PQ} = ((q-p)\cos\alpha, (q+p)\sin\alpha)$

Rの座標は $\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{3}), & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}), & \cos(-\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-p+q)\cos\alpha \\ (p+q)\sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p\cos\alpha \\ -p\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-p+q)\cos\alpha \\ (p+q)\sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p\cos\alpha \\ -p\sin\alpha\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q)\cos\alpha + (\frac{\sqrt{3}}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q)\sin\alpha + p\cos\alpha \\ (\frac{\sqrt{3}}{2}p-\frac{\sqrt{3}}{2}q)\cos\alpha + (\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q)\sin\alpha - p\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(p+q)\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}(p+q)\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\cos\alpha - \frac{1}{2}(p-q)\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(p+q)(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) \\ (p-q)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)\end{pmatrix}$ —②

$(p+q)^2-(p-q)^2 = \cancel{p^2}+2pq+\cancel{q^2}-\cancel{p^2}+2pq-\cancel{q^2}$. $4pq = (p+q)^2-(p-q)^2$ より

①より $(p+q)^2 - \frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p-q)^2 - \left\{\frac{1}{2}(p+q)^2 - \frac{1}{2}(p-q)^2\right\}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1$

$\frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p-q)^2 - \frac{1}{2}(p+q)^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}(p+q)^2\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(p-q)^2\cos^2\alpha - \frac{1}{2}(p-q)^2\sin^2\alpha = 1$

$\frac{1}{2}(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(p+q)^2 + \frac{1}{2}(1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(p-q)^2 = 1$

$\sin^2\alpha(p+q)^2 + \cos^2\alpha(p-q)^2 = 1$. $\dfrac{(p+q)^2}{\frac{1}{\sin^2\alpha}} + \dfrac{(p-q)^2}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = 1$ より.

$(p+q, p-q)$ は 楕円 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{\sin^2\alpha}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = 1$ 上の点であるから $p+q = \dfrac{1}{\sin\alpha}\cos\theta$, $p-q = \dfrac{1}{\cos\alpha}\sin\theta$ とおける.

②より. Rの座標は $\left(\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin\alpha}\cos\theta, \dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha}\sin\theta\right)$ —③

$\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=0$ のとき $\tan\alpha=\sqrt{3}$ であるが, $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha \neq 0$

よって. ③より 題意は示された.