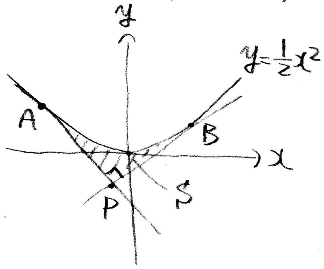
東工大　2009前期 ①



$y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $(k,\frac{1}{2}k^2)$ における接線の傾きは k

よって $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $(k,\frac{1}{2}k^2)$ における接線 —① と

$(-\frac{1}{k},\frac{1}{2k^2})$ における接線 —② は直交する

①の方程式は $y-\frac{1}{2}k^2=k(x-k)$, $y=kx-k^2+\frac{1}{2}k^2$, $y=kx-\frac{1}{2}k^2$ —①'

②の方程式は $y-\frac{1}{2k^2}=-\frac{1}{k}(x+\frac{1}{k})$, $y=-\frac{1}{k}x-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2k^2}$, $y=-\frac{1}{k}x-\frac{1}{2k^2}$ —②'

①'と②'の交点のx座標は $kx-\frac{1}{2}k^2=-\frac{1}{k}x-\frac{1}{2k^2}$, $\cancel{(k+\frac{1}{k})}x=\frac{1}{2}\cancel{(k+\frac{1}{k})}(k-\frac{1}{k})$ より $\frac{1}{2}(k-\frac{1}{k})$

対称性より $k>0$ として考えてよい

$$S=\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{k})}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{k}x+\frac{1}{2k^2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{k})}^{k}\left(\frac{1}{2}x^2-kx+\frac{1}{2}k^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2k}+\frac{x}{2k^2}\right]_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{k})}+\left[\frac{x^3}{6}-\frac{kx^2}{2}+\frac{1}{2}k^2x\right]_{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{k})}^{k}$$

$$=\cancel{\frac{1}{48}(k-\frac{1}{k})^3}+\frac{1}{8k}(k-\frac{1}{k})^2+\frac{1}{4k^2}(k-\frac{1}{k})-\left(-\frac{1}{6k^3}+\cancel{\frac{1}{2k^3}}-\cancel{\frac{1}{2k^3}}\right)+\frac{k^3}{6}-\cancel{\frac{k^3}{2}}+\cancel{\frac{k^3}{2}}-\cancel{\frac{1}{48}(k-\frac{1}{k})^3}+\frac{1}{8}k(k-\frac{1}{k})^2-\frac{1}{4}k^2(k-\frac{1}{k})$$

$$=\frac{1}{8}(k+\frac{1}{k})(k-\frac{1}{k})^2-\frac{1}{4}(k+\frac{1}{k})(k-\frac{1}{k})^2+\frac{1}{6}(k^3+\frac{1}{k^3})=-\frac{1}{8}(k+\frac{1}{k})(k-\frac{1}{k})^2+\frac{1}{6}(k^3+\frac{1}{k^3})\quad —③$$

〰部 $=(k+\frac{1}{k})(k^2-2+\frac{1}{k^2})=k^3-2k+\frac{1}{k}+k-2\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}=k^3-k-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}$ より

③ $=-\frac{1}{8}k^3+\frac{1}{8}k+\frac{1}{8}\frac{1}{k}-\frac{1}{8}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{6}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{24}k^3+\frac{1}{8}k+\frac{1}{8}\frac{1}{k}+\frac{1}{24}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{24}(k^3+3k+3\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3})=\frac{1}{24}(k+\frac{1}{k})^3$

相加平均≧相乗平均 より $k+\frac{1}{k}\geqq 2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}=2$. 等号は $k=\frac{1}{k}$, $k=1$ のとき成立つ

よって $S\geqq\frac{1}{24}2^3=\frac{1}{3}$. Sの最小値は $\frac{1}{3}$