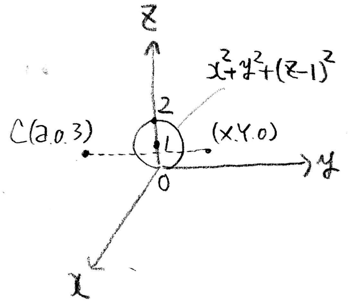
東工大　2009後期　①



Cと(X,Y,0)を通る直線上の点は $(a,0,3)+k(X-a,Y,-3)=\{k(X-a)+a,\ kY,\ -3k+3\}$ と書ける。

これと(0,0,1)の距離の2乗は

$$(X-a)^2k^2+2a(X-a)k+a^2+Y^2k^2+9k^2-12k+4$$

$$=\{(X-a)^2+Y^2+9\}k^2+2\{a(X-a)-6\}k+a^2+4$$

$$=\{(X-a)^2+Y^2+9\}\left[k^2+2\frac{a(X-a)-6}{(X-a)^2+Y^2+9}k+\left\{\frac{a(X-a)-6}{(X-a)^2+Y^2+9}\right\}^2\right]-\frac{\{a(X-a)-6\}^2}{(X-a)^2+Y^2+9}+a^2+4$$

$$=\{(X-a)^2+Y^2+9\}\left\{k+\frac{a(X-a)-6}{(X-a)^2+Y^2+9}\right\}^2+\frac{(a^2+4)\{(X-a)^2+Y^2+9\}-\{a(X-a)-6\}^2}{(X-a)^2+Y^2+9}$$

これの最小値が1以下であればよいから $\dfrac{(a^2+4)\{(X-a)^2+Y^2+9\}-\{a(X-a)-6\}^2}{(X-a)^2+Y^2+9}\leqq 1$.

$(a^2+4)\{(X-a)^2+Y^2+9\}-\{a(X-a)-6\}^2\leqq (X-a)^2+Y^2+9$.　$(a^2+3)\{(X-a)^2+Y^2+9\}\leqq a^2(X-a)^2-12a(X-a)+36$

$3(X-a)^2+12a(X-a)+(a^2+3)Y^2\leqq -9a^2+9$.　$3\{(X-a)^2+4a(X-a)+4a^2\}-12a^2+(a^2+3)Y^2\leqq -9a^2+9$

$3(X-a+2a)^2+(a^2+3)Y^2\leqq 3a^2+9$.　$\dfrac{(X+a)^2}{a^2+3}+\dfrac{Y^2}{3}\leqq 1$