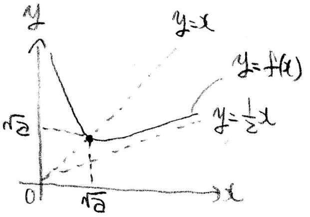
東工大 2010前期 (2)



(1) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ $(x>0)$ とする. $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)$ $f'(x)=0$ のとき $x=\sqrt{a}$

x	0	…	$\sqrt{a}$	…	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	$\sqrt{a}$	↗	∞

$f(x)$の増減表は左表

$f(x)$のグラフは右図

※ $f''(x)=-\frac{a}{2}\left(-2\frac{1}{x^3}\right)=\frac{a}{x^3}>0$ より

$f(x)$は下に凸

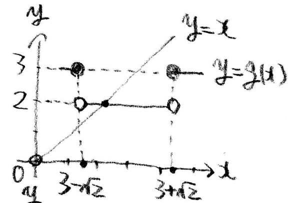
$g(x)=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$ $(x>0)$ とする

(i) $a=7$のとき

$g(x)$の最小値は2. このとき $\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{x}\right)<3$ $x^2-6x+7<0$

$x^2-6x+7=0$ のとき $x=3\pm\sqrt{9-7}=3\pm\sqrt{2}$ より $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$

よって右図のようになるから(*)は解 $x=2$ を持つ

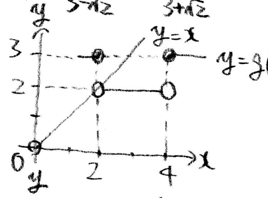


(ii) $a=8$のとき

$g(x)$の最小値は2 このとき $\frac{1}{2}\left(x+\frac{8}{x}\right)<3$ $x^2-6x+8<0$

$x^2-6x+8=0$ のとき $x=3\pm\sqrt{9-8}=2, 4$ より $2<x<4$

よって右図のようになるから(*)は解を持たない

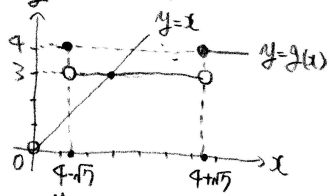


(iii) $a=9$のとき

$g(x)$の最小値は3 このとき $\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)<4$, $x^2-8x+9<0$

$x^2-8x+9=0$ のとき $x=4\pm\sqrt{16-9}=4\pm\sqrt{7}$ より $4-\sqrt{7}<x<4+\sqrt{7}$

よって右図のようになるから(*)は解 $x=3$ を持つ



(2) bを正の整数 $c=0, 1 \cdots 2b$ とする

$a=b^2+c$ のとき, $g(x)$の最小値は $\left[\sqrt{b^2+c}\right]=b$

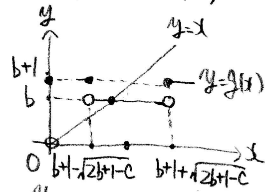
このとき $\frac{1}{2}\left(x+\frac{b^2+c}{x}\right)<b+1$ $x^2-2(b+1)x+b^2+c<0$

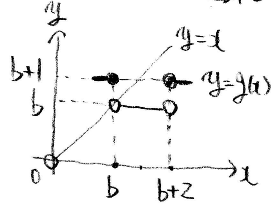
$x^2-2(b+1)x+b^2+c=0$ のとき $x=b+1\pm\sqrt{b^2+2b+1-b^2-c}=b+1\pm\sqrt{2b+1-c}$ より

$b+1-\sqrt{2b+1-c}<x<b+1+\sqrt{2b+1-c}$

$0\leqq c\leqq 2b-1$ のとき, 右上図のようになるから(*)は解 $x=b$ を持つ

$c=2b$ のとき, 右下図のようになるから(*)は解を持たない.





よって, $a_n=n^2+2n$, $a_1=3$, $a_2=8$

(3) $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

※ $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-n}{n(n+2)}$

$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{k-1}}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{k}}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4}$