東工大　2011前期 ①

(1) (i) 直線 $x=0$ 上の点は $(0, Y)$ と表せる

$$\begin{pmatrix}1-n & 1\\ -n(n+1) & n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y\\ (n+2)Y\end{pmatrix}$$ ここで $Y=1$ とすると $(1,\ n+2)$ は $x=0$ 上にないから不適

(ii) 直線 $y=kx$ ―① 上の点は $(X,\ kX)$ と表せる

$$\begin{pmatrix}1-n & 1\\ -n(n+1) & n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ kX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-n+k)X\\ \{-n(n+1)+k(n+2)\}X\end{pmatrix}$$ ここで $X=1$ とすると $(1-n+k,\ -n(n+1)+k(n+2))$

これが①上にあるとき $-n(n+1)+k(n+2)=k(1-n+k)$, $-n^2-n+(n+2)k=(-n+1)k+k^2$

$k^2+(-2n-1)k+n^2+n=0$. $k=\dfrac{2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n+1-4n^2-4n}}{2}=\dfrac{2n+1\pm1}{2}=n,\ n+1$

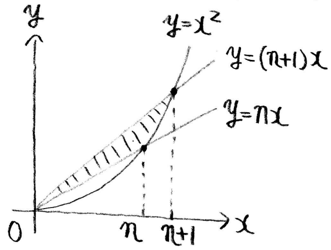
直線 $y=nx$ 上の点は $(X,\ nX)$ と表せる

$$\begin{pmatrix}1-n & 1\\ -n(n+1) & n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ nX\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-n+n)X\\ (-n^2-n+n^2+2n)X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ nX\end{pmatrix}$$ これは $y=nx$ 上の点である。

直線 $y=(n+1)x$ 上の点は $(X,\ (n+1)X)$ と表せる

$$\begin{pmatrix}1-n & 1\\ -n(n+1) & n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ (n+1)X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-n+n+1)X\\ (-n^2-n+n^2+3n+2)X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2X\\ (2n+2)X\end{pmatrix}$$ これは $y=(n+1)x$ 上の点である。

(2)



$y=x^2$ と $y=nx$ の交点の x 座標は $x^2=nx$, $x(x-n)=0$ より $0,\ n$

同様にして $y=x^2$ と $y=(n+1)x$ の交点の x 座標は $0,\ n+1$

$$S_n=\int_0^n\{(n+1)x-nx\}dx+\int_n^{n+1}\{(n+1)x-x^2\}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^n+\left[-\frac{x^3}{3}+(n+1)\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1}$$

$$=\frac{n^2}{2}-\frac{n^3+3n^2+3n+1}{3}+(n+1)\frac{n^2+2n+1}{2}+\frac{n^3}{3}-(n+1)\frac{n^2}{2}$$

$$=\frac{3n^2-2n^3-6n^2-6n-2+3n^3+6n^2+3n+3n^2+6n+3+2n^3-3n^3-3n^2}{6}=\frac{3n^2+3n+1}{6}$$

(3) $S_n-\dfrac{1}{6}=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dfrac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ より $\dfrac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=\lim_{k\to\infty}2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=2$$