東工大　2011前期 ②

(1) $\cos t - x\sin 2t = \cos t - 2x\sin t\cos t = (1-2x\sin t)\cos t$

$1-2x\sin t = 0$ のとき $\sin t = \frac{1}{2x}$

(i) $2x \leqq 1.\ x \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $(1-2x\sin t)\cos t \geqq 0$

よって $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t - x\sin 2t)dt = \left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - x\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{x}{2}(-1-1) = -x+1$

このとき $f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.

(ii) $x > \frac{1}{2}$ のとき

$\sin t = \frac{1}{2x}$ かつ $0<t<\frac{\pi}{2}$ を満たすtがただ1つ存在するから これをαとする

$0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき $(1-2x\sin t)\cos t \geqq 0$, $\alpha \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $(1-2x\sin t)\cos t \leqq 0$

よって $f(x) = \int_0^{\alpha}(\cos t - x\sin 2t)dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t + x\sin 2t)dt$

$= \left[\sin t\right]_0^{\alpha} - x\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\alpha} - \left[\sin t\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} + x\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sin\alpha + \frac{x}{2}(\cos 2\alpha - 1) - (1-\sin\alpha) - \frac{x}{2}(-1-\cos 2\alpha)$

$= \sin\alpha + \frac{x}{2}(1-2\sin^2\alpha) - \frac{x}{2} - 1 + \sin\alpha + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}(1-2\sin^2\alpha)$

$= \frac{1}{2x} + \cancel{\frac{x}{2}} - x\frac{1}{4x^2} - \cancel{\frac{x}{2}} - 1 + \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - x\frac{1}{4x^2} = x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x} = \frac{4-1-1}{4x} + x - 1 = \frac{1}{2x} + x - 1$

相加平均≧相乗平均 より $\frac{1}{2x} + x \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2x}x} = \sqrt{2}$. 等号は $\frac{1}{2x} = x$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき成り立つ より

このとき $f(x)$ は $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 最小値 $\sqrt{2}-1$ をとる.

(i)(ii)より $\sqrt{2}-1$

(2) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(-x+1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{2x}+x-1\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}\log x + \frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$= -\frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{1} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}$